Introduzione ai numeri reali

Mario Puppi

10 agosto 2016

1 Introduzione

"Few mathematical structures have undergone as many revisions or have been presented in as many guises as the real numbers. Every generation re-examines the reals in the light of its values and mathematical objectives."
Questa citazione é attribuita a Gian-Carlo Rota.

Uno dei temi piú delicati nella didattica della matematica é l'apprendimento dell'analisi, soprattutto a causa delle difficoltá che lo studente incontra con le nozioni fondamentali come i concetti di limite e di numero reale. Proponiamo qui alcuni spunti di riflessione per l'insegnante che senta l'esigenza di introdurre i concetti di numero reale e di limite con un percorso radicato sulle preconoscenze dell'insegnamento della matematica nella scuola secondaria quali *numeri, algebra, funzioni* e *misura.*

Pensiamo che lo studente debba sviluppare i concetti chiave in modo graduale, passando attraverso situazioni legate a problemi concreti, come ad esempio il calcolo di una grandezza geometrica, una lunghezza o un'area. L'idea di "successione convergente" dovrebbe emergere come risposta al problema di matematizzare il concetto intuitivo di "processo infinito che calcola qualcosa di interessante" e il concetto di numero reale come la matematizzazione del risultato di un tale processo. Adotteremo delle strategie basate sull'antica idea euclidea del numero come misura, ossia rapporto tra due grandezze e sulla concezione di numero reale come espansione decimale. Lo stesso Newton nel 1671 scrive che per sviluppare il calcolo delle "variabili", basato sulla riduzione in serie di potenze, ha usato l'analogia con il calcolo delle espansioni decimali infinite.

Il concetto da cui partiremo per introdurre i numeri decimali é quello di "approssimazione", che ha una semplice interpretazione geometrica che fornisce una buona base intuitiva alle nozioni metriche che sono alla base dei concetti di limite e di numero reale. Il legame tra numero decimale ed approssimazione é poi di fondamentale importanza, non solo nel curricolo scolastico matematico ma anche nell'uso che le altre discipline fanno della matematica: il numero di cifre decimali dopo la virgola é spesso usato come un indicatore della precisione di un'approssimazione fornita da un numero decimale.

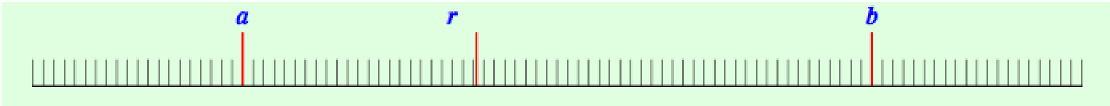
Il percorso proposto partirá da situazioni problematiche tratte dalla realtá in cui si deve misurare una grandezza. E' un approccio fondamentale per introdurre l'analogia tra processi di misura e processi di calcolo su cui si baserá l'intuizione di approssimazione, fondamentale per arrivare al concetto di numero reale.

2 Approssimazione di numeri reali

2.1 Nozione intuitiva di approssimazione

I numeri reali sono la matematizzazione del continuum che storicamente si é imposta nel corso del '800, quando si é avuta la svolta nota come *aritmetizzazione dell'analisi*, con il contributo di matematici come D'Alembert, Cauchy, Bolzano, Weerstrass, Dedekind e Cantor. In precedenza, i matematici preferivano basare l'aritmetica sulla solida tradizione geometrica di origine euclidea, ma giá a partire dai lavori di Stevino alla fine del '500, avevano cominciato a lavorare con i numeri decimali, almeno a livello algoritmico. Ci sono diverse interpretazioni del continuum, ma quelle che vengono tradizionalmente usate nell'insegnamento secondario si possono ricondurre a due tipi fondamentali: l'interpretazione geometrica che rappresenta il continuum su una retta e l'interpretazione aritmetica che rappresenta il continuum come una struttura numerica, in cui i numeri reali si possono costruire usando metodi diversi a partire dai numeri naturali che sono sempre l'ingrediente di base. L'approccio proposto partirá dai numeri decimali finiti, senza rinunciare all'intuizione geometrica rappresentata dalla metafora dell'approssimazione.

La *retta numerica reale* sará lo sfondo su cui penseremo collocati i punti che identificheremo con i *numeri reali*. La metafora di cui ci serviremo, almeno all'inizio, sará di concepire i numeri reali come delle grandezze che si possono misurare attraverso strumenti limitati. Il risultato di un'osservazione che voglia misurare un numero reale r sará in generale un'approssimazione di r. Le approssimazioni sono delle informazioni sui numeri reali che si possono esprimere usando solo numeri razionali. Dati due numeri razionali a, b tali che $a < b$ e un numero reale r, diremo che l'intervallo di numeri $]a, b[= \{x | a < x < b\}$ é un'*approssimazione* di r se $a < r < b$.
La *precisione dell'approssimazione* $]a, b[$ é il numero razionale positivo $b - a$, che coincide tra l'altro con la distanza sulla retta numerica dei punti razionali a, b.



Ribadiamo la distinzione di ruoli: il numero reale r é l'oggetto da approssimare, mentre a e b sono i *numeri osservabili*. Questi ultimi sono particolari numeri razionali, direttamente accessibili con gli strumenti di calcolo, che possono essere conosciuti in modo "esatto". Le relazioni di uguaglianza, di ordine e le operazioni aritmetiche sui numeri reali possono essere tutte "approssimate" usando i numeri osservabili, come vedremo.

2.2 Approssimazione tra i babilonesi, 1800-1600 a.C.

L'idea di approssimare una grandezza L con una coppia di numeri osservabili, uno un pó piú piccolo di L, l'altro un pó piú grande, é giá presente nell'aritmetica babilonese ([1]). I babilonesi avevano adottato il sistema sessagesimale e usavano, a modo loro, dei "numeri con la virgola". Nella loro aritmetica i numeri osservabili sono i numeri che richiedono un numero finito di cifre sessagesimali. Ad esempio, il numero $\frac{1}{9}$ richiede solo le due cifre $6, 40$ dopo la virgola dato che

$$\frac{1}{9} = 6 \times \frac{1}{60} + 40 \times \frac{1}{60^2}$$

Conveniamo che la sequenza di cifre sessagesimali $[6, 40]$ rappresenti $\frac{1}{9}$. Nell'aritmetica babilonese la divisione di due numeri osservabili a, b veniva ridotta alla moltiplicazione di a per il reciproco di b. Non tutti i reciproci di numeri interi sono osservabili come $\frac{1}{9}$ cosí c'era l'esigenza di approssimare i reciproci di numeri come $\frac{1}{7}$ che richiedono una sequenza infinita di cifre sessagesimali. Per motivi di efficienza si registravano su tavolette i reciproci dei numeri interi ed é cosí che abbiamo potuto ritrovare l'approssimazione di $\frac{1}{7}$ come

$$[8, 34, 16, 59] < \frac{1}{7} < [8, 34, 18]$$

I babilonesi avevano sviluppato un calcolo in cui numeri come $\frac{1}{7}$ che richiedevano infinite cifre venivano sostituiti con numeri rappresentabili da sequenze finite di cifre. Il calcolo dei babilonesi era basato sull'idea di approssimare ogni numero, dato o risultato di una sequenza di operazioni, con numeri finitamente rappresentabili.

E' un programma di riduzione al finito analogo a quello del calcolo numerico moderno e deve il suo successo al fatto che i numeri osservabili hanno una proprietá di densitá simile a quella dei numeri razionali ([2]). L'idea di approssimare un qualsiasi numero con una coppia di numeri osservabili é alla base delle origini del calcolo numerico e del concetto moderno di numero reale, in essa é contenuto il germe della nozione topologica di intorno che sará formalizzata solo all'inizio del '900.

Esercizio 1. Due approssimazioni di π usate comunemente sono $22/7$ e 3.14. Quale delle due approssimazioni é piú precisa?

Esercizio 2. Un esperimento di chimica, se eseguito in modo esatto, dovrebbe dare per risultato la produzione di 34.5 g di una sostanza. L'istruttore di laboratorio accetta che si commetta un errore sperimentale pari a $\frac{1}{100}$ della massa corretta. Determinare l'intervallo della retta numerica che contiene tutte le misurazioni accettabili. Desscrivere l'intervallo in due modi: $[a, b]$ e $\{x : |x - c| \leq \epsilon\}$, con a, b, c numeri decimali.

2.3 Concetto di retta numerica reale: commenti

Storicamente c'é stato piú di un modo di intendere il concetto di *continuum* e i numeri reali rappresentano il modello standard di questo concetto che si é imposto. I numeri reali sono rappresentati come una retta completa rispetto all'operazione di "limite" se seguiamo l'approccio di Cantor, oppure completa rispetto all'operazione di "estremo superiore" se usiamo l'approccio delle sezioni di Dedekind. Un altro approccio, dovuto a Bolzano, definisce un numero reale come il risultato dell'intersezione di una successione di intervalli decrescenti. Tutte queste rappresentazioni condividono un nucleo di proprietá essenziali che costituiscono la "Teoria dei numeri reali", la quale é categorica, nel senso che tutti i suoi modelli sono isomorfi. Il percorso didattico che proponiamo vuole introdurre i numeri reali come espansioni decimali e usare questa rappresentazione per definire il concetto di limite di una successione e dimostrare la proprietá di completezza della retta reale. Le successioni saranno introdotte per matematizzare l'idea di processo infinito partendo da esempi concreti come il calcolo della radice di 2. Il passo successivo sará quello di definire il concetto di equivalenza di due successioni. Ne ricaveremo la nozione di limite come caso particolare. Analizzeremo le difficoltá cognitive degli studenti nei concetti chiave, che dipendono dalle loro preconcezioni sui processi infiniti.

3 Numeri decimali

Simone Stevino, sul finire del '500, propone un programma per aritmetizzare il continuum, ispirandosi alla tradizione euclidea di ridursi a relazioni tra numeri naturali. Stevino presenta un sistema aritmetico ([4]) basato sui numeri decimali, un approccio piú agile rispetto rispetto al calcolo geometrico con le grandezze degli Elementi di Euclide ([3]). Nell'*Arithmetica* Stevino si propone di rappresentare tutti i numeri della pratica commerciale, sia quelli usati per le grandezze discrete sia quelli usati per le grandezze continue, con un unico sistema di calcolo. Il programma di Stevino sará accolto favorevolmente dall'ambiente scientifico e finirá per diventare l'approccio standard ai "numeri reali" [van der Waerden], almeno per quanto riguarda il calcolo aritmetico. Nel 1585 Stevino scriveva: "I numeri decimali sono un tipo di aritmetica basato sull'idea della progressione dei dieci, che usa la scritura araba per esprimere ogni numero come somma di potenze di 10 e in cui tutti i calcoli che si trovano negli affari si possono eseguire usando solo operazioni sui numeri interi, senza bisogno delle frazioni." Stevino concepiva i numeri reali (chiamati "numeri continui"), avendo come modello di riferimento le grandezze continue, ed usava la metafora dell'acqua per illustrare analogie tra numeri e grandezze, in particolare la proprietá che un numero puó essere diviso indefinitamente. La base dell'aritmetica del continuum di Stevino sono le "frazioni decimali", cioé le frazioni il cui denominatore é una potenza di 10. Ispirandoci al programma di Stevino, proponiamo la seguente

Definizione. Un *numero decimale* é un numero che si puó scrivere come un prodotto della forma $m \times 10^k$, dove m e k sono numeri interi.

Un esempio di numero decimale é 2.34, dal momento che puó essere scritto nella forma 234×10^{-2}. Nel caso di 2.34, i due numeri interi sono $m = 234$ e $k = -2$. Ogni numero intero m é un numero decimale, dato che possiamo scrivere $m = m \times 10^0$.

Se k é un numero naturale, indicheremo con il simbolo $\mathbb{D}_k$ l'insieme di tutti i numeri decimali della forma $m \times 10^{-k}$ per qualche numero intero m. Questi sono i multipli interi di $u_k = 10^{-k}$. In particolare, $\mathbb{D}_0$ é l'insieme dei numeri interi mentre l'insieme $\mathbb{D}_1$ é formato dai numeri con una cifra decimale $2.0, 3.7, 1.4, -2.0$.

La sequenza di insiemi $\mathbb{D}_0 \subseteq \mathbb{D}_1 \subseteq \mathbb{D}_2 \subseteq \dots$ forma una catena, se $h < k$ allora $\mathbb{D}_h$ é contenuto in $\mathbb{D}_k$, per esempio 2.1 é un elemento di $\mathbb{D}_1$ ma appartiene anche a $\mathbb{D}_2$ dato che 2.1$= 210 \times 10^{-2} = 2.10$.

3.1 Numeri per misurare

Uno dei temi ricorrenti del curricolo matematico, dalla scuola primaria fino al termine del ciclo secondario, riguarda la misura. E' un tema trasversale che investe sia l'ambito geometrico che quello numerico e finisce per interessare anche la probabilitá se la pensiamo come una misura dell'incertezza. L'uso di situazioni in cui si misurano quantitá del mondo reale, come lettori di velocitá, distanze, tempi, pesi, volumi, ecc... ha un impatto positivo nell'apprendimento dei numeri decimali e delle frazioni decimali. Nelle situazioni proposte useremo l'idea che un numero decimale approssimi la grandezza misurata e che il numero di cifre decimali sia un indicatore della precisione della misura. A scanso di equivoci, la "precisione" che usiamo in questo contesto non deve essere intesa nello stesso delle nozioni comunemente usate nelle discipline sperimentali.

Problema 1. Il circuito automobilistico. Dato un circuito automobilistico, misurarne la lunghezza con la precisione di 1 metro. Si ha a disposizione un'auto il cui contachilometri riporta valori che sono multipli di 0.1 Km.

Risoluzione. Procediamo per passi.

Primo passo. Come misura il contachilometri? Supponiamo che alla partenza il contachilometri segni il valore 0.0 Km e che nell'istante in cui l'auto ha percorso una distanza L, il valore segnato dal contachilometri sia 34.7 Km.

Qual é l'approssimazione che possiamo dedurne sulla distanza L percorsa? Se sul contachilometri leggo il valore 34.7 Km allora ne desumiamo un'approssimazione $34.7 < L < 34.8$ la cui precisione é 0.1 Km. I valori forniti dal contachilometri sono numeri dell'insieme $\mathbb{D}_1$. Una caratteristica dello strumento é di approssimare le distanze percorse con una precisione fissa di 0.1 Km, quale che sia la lunghezza misurata.

passo 2. Supponiamo che la lunghezza del circuito sia data con la precisione di 1 metro, $L = 1.3572$ Km. Come sperimentatori ignoriamo, il valore reale di L e dobbiamo trovare un modo per approssimarlo con la precisione richiesta di 1 metro. Quale sará il valore letto sul contachilometri dopo avere percorso una volta il circuito? Sul contachilometri leggeremo il valore 1.3 Km. L'approssimazione che ne deduciamo é 1.3 Km $< L <$ 1.4 Km.
Se percorriamo 2 volte il circuito, quale valore leggeremo sul contachilometri? Quale approssimazione ne ricaveremo per L? Quale sará la sua precisione? Dopo 2 giri l'auto avrá percorso $2L$ Km $= 2\times1.3572$ Km $= 2.7144$ Km. Sul contachilometri leggeremo il valore 2.7 Km, un'approssimazione di $2L$, sempre con la precisione di 0.1 Km: 2.7 Km$< 2L <$ 2.8 Km. Ne ricaviamo un'approssimazione su L: 1.35 Km$< L <$ 1.4Km, con precisione doppia della precedente, di 0.05Km.

passo 3. Se percorriamo il circuito n volte, $n = 1, 2, 3, 4, 5$, quale valore leggeremo sul contachilometri? Quale approssimazione ne ricaveremo per L? Quale precisione? Costruiamo una tabellina con le risposte a queste domande.

numero di giri	approssimazione di L	precisione
$n = 1$	1.3 Km $< L <$ 1.4 Km	$\epsilon = 0.1$Km
$n = 2$	$\frac{2.7}{2}$ Km $< L <$ $\frac{2.8}{2}$ Km	$\frac{\epsilon}{2}$
$n = 3$	$\frac{4.0}{3}$ Km $< L <$ $\frac{4.1}{3}$ Km	$\frac{\epsilon}{3}$
$n = 4$	$\frac{5.4}{4}$ Km $< L <$ $\frac{5.5}{4}$ Km	$\frac{\epsilon}{4}$
$n = 5$	$\frac{6.7}{5}$ Km $< L <$ $\frac{6.8}{5}$ Km	$\frac{\epsilon}{5}$

passo 4. In generale, se percorriamo n giri del circuito qual é l'approssimazione che si ricava per L? Qual é la precisione di tale approssimazione?

In generale, dopo n giri sul contachilometri leggeremo un valore, poniamo sia v Km, che é un'approssimazione della distanza percorsa nL: v Km $< nL < v+1$ Km da cui ricaveremo un'approssimazione su L: $\frac{v}{n}$Km $< L < \frac{v+1}{n}$Km, la cui precisione é $\frac{1}{n}$Km.

passo 5. Per avere la precisione richiesta di 1 metro quanti giri del circuito dovrá fare l'auto?

Quando l'auto percorre n giri possiamo leggere sul contachilometri una misura di precisione $\frac{1}{n}$Km. Uguagliandola alla precisione richiesta di 1 metro $= \frac{1}{1000}$Km, otteniamo l'equazione $\frac{1}{n}$Km $= \frac{1}{1000}$Km, che ammette la soluzione $n = 1000$.

Problemi di misurazione, come quello della lunghezza del circuito, possono essere l'occasione per fare una serie di attivitá di tipo laboratoriale. L'obiettivo é far emergere negli allievi l'idea matematica di fondo che per approssimare una grandezza L troppo piccola rispetto alla precisione dello strumento si puó fare un ingrandimento nL della grandezza in gioco, con n grande abbastanza. Come conclusione di una serie di problemi di questo tipo si potrá generalizzare:

Problema 2. Data una successione di numeri $x_0, x_1, x_2, \ldots$ che approssimano una grandezza data L e assegnata una precisione ϵ, trovare n grande abbastanza per ottenere una approssimazione x_n di L che abbia la precisione richiesta.

Non é difficile pensare a delle attivitá che siano coerenti con questo approccio.

Problema 3. Misurare lo spessore della pagina di un libro con la precisione di $1/5$ di millimetro. Si dispone di un righello graduato con tacche di 1mm.

Problema 4. Un sacco contiene 10kg di pallini tutti uguali. Con una una bilancia della precisione di 1g é possibile misurare il peso di un pallino con la precisione di 0.01g?

Uno degli aspetti interessanti del concetto di misura é che possiamo ragionare su rapporti tra le misure di due grandezze anche senza conoscere le misure di una delle grandezze stesse. Nel problema 3, ad esempio, si consideri la relazione tra lo spessore S di 1000 pagine di un libro e lo spessore s di 1 pagina del libro. Il rapporto é noto a priori come 1000:1 e se la misurazione ci permette di ottenere $S = 3$cm, possiamo ottenere lo spessore s di una pagina risolvendo la proporzione: $1000 : 1 = S : s$, cioé $s = \frac{S}{1000} = \frac{3}{1000}$cm. Queste relazioni moltiplicative sono alla radice dell'apprendimento non solo del ragionamento proporzionale ma anche delle forme tipiche di ragionamento algebrico.

3.2 Numeri decimali: dividi e misura

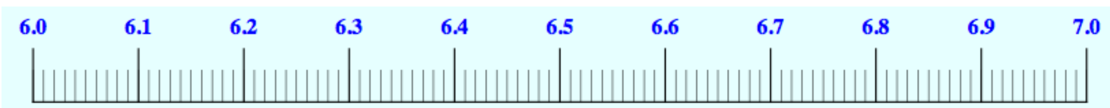
I numeri decimali possono essere pensati come risultati di processi di misura. Estendiamo la metafora e immaginiamo che un processo di calcolo aritmetico con le operazioni usuali definite sui numeri interi, quali addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione con resto, sia come l'apparato di un esperimento concepito per misurare una grandezza. L'approccio é in un certo senso euclideo, con i numeri pensati come misure, vale a dire rapporti tra grandezze. In particolare il *massimo comun divisore* é un'operazione che fornisce come risultato la *misura comune* di due grandezze. Vediamo quindi un problema classico secondo l'approccio proposto:

Problema 5. Dalla frazione al numero decimale. Trovare un numero decimale che approssimi la frazione $\frac{44}{7}$ con una precisione 0.1. Si dispone della struttura dei numeri interi con le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione intera con resto.

Il problema dato consiste nel trovare un'approssimazione (a, b) del numero razionale $\frac{44}{7}$, i cui estremi a, b siano numeri osservabili, in questo caso i numeri decimali finiti.

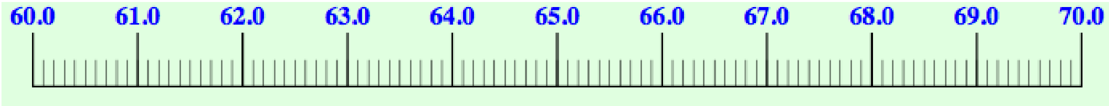
Questa situazione é lo spunto per proporre un problema aritmetico. Lo studente sará coinvolto nello studio della divisione intera, un algoritmo che produce un quoziente ed un resto interi, usando gli strumenti di addizione, sottrazione e moltiplicazione sui numeri interi. Il procedimento di divisione intera viene visto come un processo di misurazione che fornisce approssimazioni di precisione 1 per qualsiasi rapporto di numeri interi. Ad esempio, la divisione intera di 44 per 7 fornisce come quoziente 6 e come resto 2, da cui si ricava l'approssimazione $6 < \frac{44}{7} < 7$. Possiamo migliorare l'approssimazione, per ottenerne una di precisione 0.1 rispondendo alla domanda seguente.

Quale tra i seguenti intervalli di ampiezza 0.1 contiene $\frac{44}{7}$?

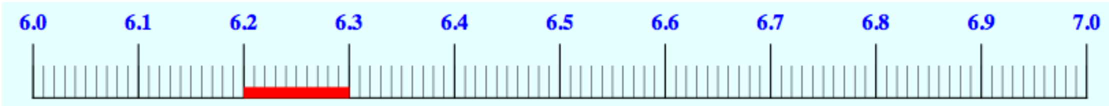


Useremo lo strumento di divisione intera per approssimare $10 \times \frac{44}{7}$. Di nuovo la metafora dello zoom. Riscriviamo la grandezza da misurare come frazione di interi, in modo da applicare lo strumento di divisione intera. Dopo l'ingrandimento, ossia la *moltiplicazione per* 10, abbiamo ancora un problema di divisione sui numeri interi:

Quale tra i seguenti intervalli di ampiezza 1 contiene $\frac{440}{7}$?

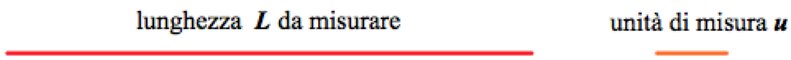


Lo "strumento" di divisione intera ci fornisce la risposta: 7 é contenuto 62 volte in 440, con il resto di 6, per cui si ha $62 < \frac{440}{7} < 63$.
Torniamo indietro, dividiamo per 10, e ricaviamo l'approssimazione richiesta: $6.2 < \frac{44}{7} < 6.3$:

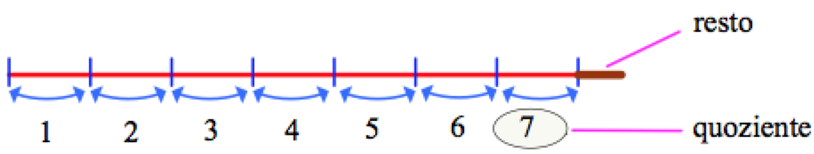


3.3 Il concetto di misurazione in Euclide.

L'algoritmo della divisione intera era giá una tecnica nota nella matematica greca antica, probabilmente legata al problema della misurazione di una grandezza. Una misura é per i greci un numero, cioé un rapporto tra due grandezze, una delle quali viene fissata e chiamata l'unitá. Negli *Elementi* di Euclide il processo di misurare una grandezza L consiste nel contare quante volte una grandezza prefissata u, l'unitá di misura, é contenuta in L.



Si tratta di fatto di una riduzione del processo di misurare al processo di contare. Il processo di misurare potrebbe essere descritto in modo algoritmico come l'iterazione di una sottrazione: sottrai l'unitá u finché é possibile dalla grandezza iniziale L. Il processo termina quando si ottiene un resto piú piccolo dell'unitá di misura u.



In questo processo possiamo riconoscere l'algoritmo di divisione euclidea. Per la veritá bisogna dire che l'algoritmo ha origini precedenti agli *Elementi* e che Euclide non usa mai il termine "divisione". Per Euclide misurare una grandezza L significa quantificare il rapporto tra L e l'unitá u, che viene assunta come una sorta di atomo indivisibile ([3]). Secondo questa prospettiva é possibile misurare grandezze piú piccole dell'unitá senza frazionare l'unitá in sottomultipli, ma andando a misurare i suoi multipli. Ritroviamo residui della tradizione euclidea in un problema tipico della scuola secondaria di I grado.

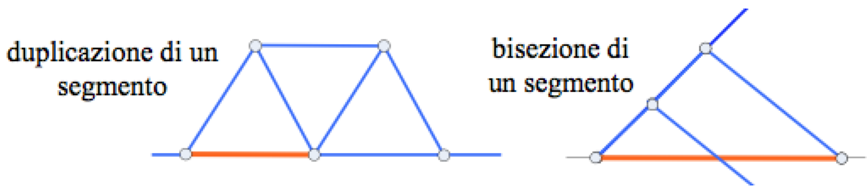
Problema 6. E' dato un segmento di lunghezza L e si chiede di trovare le due parti a, b di L che stanno tra loro in un rapporto dato $m : n$ di due numeri interi. Partendo dall'ipotesi che esista una misura comune u delle due parti a, b, per cui $a = xu, b = yu$, l'intuizione geometrica ci permette di aiuta a capire la catena di uguaglianze: $L = a + b = xu + yu = (x + y)u$, mentre la proprietá invariantiva della divisione ci permette di riconoscere che $m : n = a : b = (xu) : (yu) = x : y$. La soluzione é data allora da $x = m, y = n = a$, l'unitá é $u = \frac{1}{m+n}L$ e le due parti sono esprimibili come multipli interi dell'unitá:

$$a = mu = \frac{m}{m+n}L, b = nu = \frac{n}{m+n}L$$

.

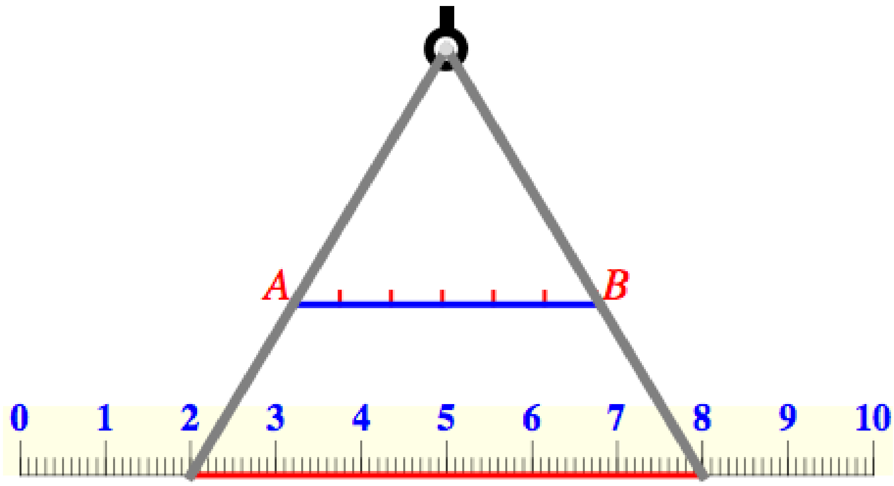
Problema 7. Approssimazione geometrica e Teorema di Talete. Dati un segmento unitá u ed un segmento di lunghezza L, compresa tra 3u e 4u, approssimare L con una precisione u. Sono disponibili gli strumenti riga e compasso.

L'ambiente didattico ideale per questo problema é un laboratorio con software di geometria dinamica dove siano accessibili gli strumenti per le costruzioni geometriche, con cui é richiesta una certa familiaritá. Suggeriamo un percorso in cui si affronti inizialmente il problema della duplicazione di un segmento



e il problema inverso della bisezione di un segmento, come applicazione del teorema di Talete.

Problema 8. Il compasso di Galileo. Nel 1606 Galileo mise in vendita un compasso di sua invenzione accompagnato da un libretto di istruzioni in cui ne descriveva le applicazioni ([7]). Per dividere un segmento AB in n parti uguali si puó ricorrere ad una similitudine che faccia corrispondere gli estremi A e B a due punti del righello numerico che abbiano coordinate intere, a distanza n unitá. Alla suddivisione $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ del righello in n parti uguali corrisponde nella similitudine una suddivisione del segmento AB in n parti uguali. La figura sotto mostra il caso $n = 6$ con $x_0 = 2, x_1 = 3, \ldots, x_6 = 8$.



3.4 Scoperta degli incommensurabili.

L'esistenza di grandezze incommensurabili ha un ruolo significativo nel curricolo secondario per cui vale la pena tracciare qui un breve percorso che la colloca nel contesto che stiamo proponendo. Gli storici hanno discusso spesso sul metodo con cui i greci giunsero a scoprire l'esistenza di grandezze incommensurabili, ma sulla questione ci sono solo delle congetture. Si ritiene che la prima coppia di grandezze incommensurabili scoperta fosse costituita dal lato e la diagonale di un quadrato ([2]). La dimostrazione che si trova nel libro X degli *Elementi* di Euclide é quella classica, basata sul ragionamento che l'ipotesi di commensurabilitá tra il lato e la diagonale di un quadrato porta alla conclusione assurda che esistano numeri interi che sono sia pari che dispari. Una dimostrazione coerente con lo spirito e i metodi del nostro percorso didattico, potrebbe seguire la traccia seguente, basata sull'algoritmo greco dell' *Anthyphairesis* ([2])

1) La concezione euclidea di rapporto di grandezze come confronto o misura. Euclide non parla mai dell'operazione di divisione, cosí come é concepita nel senso moderno, piuttosto preferisce usare il linguaggio delle proporzioni. Le frazioni erano note ai greci, usate ad esempio nell'aritmetica egizia, ma Euclide vuole evitare la divisione dell'unitá. La proporzione $a : b = c : d$ stabiliva una relazione tra le quattro grandezze a, b, c, d che si leggeva: a misura b quanto c misura d.

2) La definizione euclidea di grandezze commensurabili. Due grandezze a, b sono *commensurabili* se esiste una grandezza d tale che *a e b siano multipli comuni di d*. Tale grandezza d si dice anche una *misura comune di a, b* e corrisponde al concetto moderno di "divisore comune".

3) L'algoritmo euclideo permette di calcolare la piú grande misura comune (in termini moderni, il "massimo comun divisore") a due grandezze date a, b.

4) Se l'algoritmo non termina le due grandezze a, b non sono commensurabili.

5) L'algoritmo euclideo non termina quando viene applicato al lato e alla diagonale di un quadrato.

Un approccio ancora coerente con il nostro percorso didattico é quello proposto da Knorr ([8]). Si parte da un quadrato iniziale Q_0 di lato a_0 e diagonale d_0. Ora, ogni segmento é una grandezza bisecabile e questa proprietá delle grandezze continue ci permette di costruire iterativamente una successione di quadrati Q_n di lato a_n e diagonale d_n, dati da $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$ e $d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n$. Mentre nel continuo una successione del genere esiste perché le grandezze continue sono indefinitamente bisecabili, nel mondo aritmetico dei numeri naturali questo non puó succedere perché prima o poi il processo termina in un numero che é dispari oppure l'unitá, ogni volta che si parte da un quadrato Q_0 in cui sia il lato a_0 che la diagonale d_0 sono interi.

4 Numeri reali come espansioni decimali

L'approccio di Stevino ai numeri reali non é meno rigoroso degli approcci fondazionali dell'800 delle sezioni di Dedekind o delle successioni di Cauchy. Il programma di Stevino é di ridurre il concetto di numero reale al concetto di successione di numeri decimali i cui ingredienti sono i numeri naturali. Intuitivamente, un numero reale x é un numero decimale infinito $c_0.c_1c_2c_3\ldots$ dove c_0 é la parte intera di x e sará indicato con $x[0]$, mentre c_i sono cifre decimali, vale a dire elementi dell'insieme $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, per tutti gli indici $i > 0$. Come i numeri razionali anche i numeri reali si possono pensare come risultati di misurazioni. La differenza rilevante rispetto ai numeri discreti é che un numero reale x puó essere concepito come il risultato di un processo infinito che possiamo osservare a diversi stadi $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ di una successione discreta infinita. Ad ogni passo k possiamo accedere al risultato parziale $c_0.c_1c_2c_3\ldots c_k$, il numero decimale che indicheremo con $x[k]$. I numeri decimali svolgono un ruolo speciale in questa rappresentazione dei numeri reali, perché ci consentono di accedere ai numeri reali a qualsiasi livello di precisione. A livello k abbiamo la griglia $\mathbb{D}_k$ dei numeri decimali con k cifre, che formano un insieme con un ordine discreto in cui ogni elemento q ha un successivo $q + u_k$ ed un predecessore $q - u_k$. Possiamo fare uno zoom della griglia $\mathbb{D}_k$ sulla retta numerica dei reali per ottenere una griglia piú fine $\mathbb{D}_{k+1}$, che ci permette di osservare in modo piú accurato i numeri reali.

Definizione. Una successione (x_n) di numeri decimali é l'*espansione decimale di un numero reale* a se per ogni numero naturale n sono soddisfatte le due condizioni:

1) x_n é un elemento di $\mathbb{D}_n$

2) $x_n = a[n]$

Possiamo dare una caratterizzazione intrinseca delle successioni (x_n) di numeri decimali che sono le espansioni di un qualche numero reale:

Definizione. Una successione (x_n) di numeri decimali é la *espansione decimale* di qualche numero reale se per ogni numero naturale n sono soddisfatte le due condizioni:

1) x_n é un elemento di $\mathbb{D}_n$

2) $x_{n+1}[n] = x_n$

La condizione 2. si puó sostituire con
2a) $x_{n+1} - x_n = cu_{n+1}$ per qualche numero intero $c \in \{0, 1, \ldots, 9\}$

Le espansioni decimali sono particolari rappresentazioni che vengono usate per i numeri reali. In genere, un numero reale ammette un'unica espansione decimale, ma ci sono dei casi speciali. Data una espansione decimale $x = c_0.c_1c_2c_3\ldots.$ consideriamo i due casi speciali:

1) Esiste un indice n tale che $c_k = 0$ per ogni $k > n$.

2) Esiste un indice n tale che $c_k = 9$ per ogni $k > n$

Nel caso 1), x é il numero decimale $x[n] = c_0.c_1c_2\ldots c_n$
Nel caso 2), $x = c_0.c_1c_2c_3.\ldots c_n999999\ldots$
Assumeremo nel caso 2) che x sia coincidente con il numero reale dato dal numero decimale successivo di $x_n = c_0.c_1c_2c_3.\ldots c_n999999$ nella griglia $\mathbb{D}_n$:

$$x = succ\ x[n] = x[n] + u_n$$

Ad esempio, sia $x = 0.49999\ldots.$ Allora $n = 1, x = succ\ x[1] = x[1] + u_1 = 0.4 + 0.1 = 0.5$

I numeri decimali sono i numeri reali che hanno entrambe le due espansioni decimali 1) e 2). 1) é detta la *espansione decimale standard.*

4.1 Espansione decimale di radice quadrata di 2

Nel 1343 Johannes De Muris, in *Quadripartitum numerorum*, approssima $\sqrt{2}$ partendo dall'uguaglianza

$$\sqrt{2} = \frac{1}{1000}\sqrt{2 \times 10^6}$$

ed usando il fatto che 1414 é il piú grande numero intero nell'insieme $\{x | x^2 \leq 2 \times 10^6\}$.

Vogliamo costruire una successione (a_n) di numeri decimali tale che a_n sia per ogni numero naturale n la miglior approssimazione dal basso di $\sqrt{2}$ tra gli elementi dell'insieme $\mathbb{D}_n$ costituito dai numeri decimali con n cifre. Si potrebbe applicare il metodo di De Muris e calcolare per ogni n il piú grande intero nell'insieme $\{x | x^2 \leq 2 \times 10^{2n}\}$. Preferiamo invece usare un modo piú effciente, di tipo iterativo, che sfrutti la conoscenza di a_n per calcolare a_{n+1}.

Assumiamo che esista un numero positivo x tale che $x^2 = 2$. Assumiamo la monotonia della funzione *quadrato* $x \to x^2$ sui numeri positivi per dedurre da $1^2 < 2 < 2^2$ l'asserzione

$$1 < x < 2 \tag{1}$$

Ora sappiamo che x é compreso tra 1 e 2, cosí esattamente una tra le seguenti asserzioni sará vera:

$$1.0 \leq x < 1.1, 1.1 \leq x < 1.2, 1.2 \leq x < 1.3, 1.3 \leq x < 1.4, \ldots, 1.9 \leq x < 2.0$$

Abbiamo un metodo effettivo per determinare quale delle dieci asserzioni é vera: calcoliamo i quadrati:

$$1.00 = 1.0^2, 1.21 = 1.1^2, 1.44 = 1.2^2, 1.69 = 1.3^2, 1.96 = 1.4^2, 2.25 = 1.5^2$$

e riusiamo la monotonia della funzione $x \to x^2$ per scoprire che $1.4^2 = 1.96 < 2 < 2.25 = 1.5^2$, e concludere che vale l'asserzione:

$$1.4 < x < 1.5 \tag{2}$$

Nel prossimo passo ci chiediamo quale delle seguenti asserzioni é vera:

$$1.40 \leq x < 1.41, 1.41 \leq x < 1.42, 1.42 \leq x < 1.43, \ldots, 1.49 \leq x < 1.50$$

e scopriamo con il metodo già usato di calcolare i quadrati che l'asserzione vera é

$$1.41 \leq x < 1.42 \tag{3}$$

Con questo metodo costruiamo una successione di intervalli $a_n \leq x < b_n$, tutti contenenti x ed aventi come punti estremi a_n, b_n. Riassumendo, i primi passi ci danno $n = 0, a_0 = 1, b_0 = 2$ con il risultato parziale (1), poi $n = 1, a_1 = 1.4, b_1 = 1.5$ con l'intervallo (2), quindi $n = 2, a_0 = 2, b_0 = 2$ che ci fornisce il risultato parziale (3). Possiamo sempre suddividere lo spazio tra i due numeri decimali a_n, b_n in 10 parti uguali e calcolare i quadrati di 10 punti per localizzare x in un intervallo $a_{n+1} \leq x < b_{n+1}$ di ampiezza che é 10 volte piú piccola del precedente. Procedendo in questo modo possiamo arrivare dopo altri 5 passi al risultato parziale $n = 7$:

$$1.4142135 \leq x < 1.4142136 \tag{4}$$

Il processo non termina, perché x é un numero irrazionale, e produce una successione infinita di intervalli, tutti contenenti x. Al passo n, il risultato parziale relativo é $a_n \leq x < b_n$. Il risultato del processo é l'espansione decimale infinita: $1.4142135\ldots$. Non potremo mai eseguire fino in fondo il processo, ma per ogni n potremo osservare il risultato parziale del processo al passo n, il numero decimale finito a_n. Possiamo cosí identificare il processo con la successione dei suoi risultati parziali:

$$a_0 = 1, a_1 = 1.4, a_2 = 1.41, a_3 = 1.414, a_4 = 1.4142, a_5 = 1.41421, a_6 = 1.414213, \ldots$$

Possiamo pensare al processo che genera "la radice quadrata di 2" come a un processo di misura, in cui ad ogni passo raffiniamo l'unitá di misura. La successione delle unitá di misura usate nel corso del processo sono:

$$u_0 = 1, u_1 = 0.1, u_2 = 0.01, u_3 = 1.001, u_4 = 1.0001, u_5 = 1.00001, u_6 = 1.000001, \ldots$$

Definimo ricorsivamente la successione (a_n):

$$a_0 = 1, a_{n+1} = a_n + k_{n+1}u_{n+1} \tag{5}$$

dove k_{n+1} è l'unico numero intero $c \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ tale che

$$(a_n + cu_{n+1})^2 \leq 2 < (a_n + (c + 1)u_{n+1})^2$$

La successione (k_n) fornisce la sequenza delle cifre dell'espansione decimale di x : $m.k_1k_2k_3\ldots$ dove m é la parte intera di x. Al passo $n+1$ otteniamo un'informazione piú precisa su x, che al passo n: la lunghezza dell'intervallo $[a_n, b_n[$ é 10 volte quella dell'intervallo $[a_{n+1}, b_{n+1}[$.

Il processo che genera l'espansione decimale di x, radice quadrata di 2, é un algoritmo ben definito. C'é un modo non ambiguo di definire il termine n-esimo a_n, quale che sia il valore di n, anche senza ricorrere all'esecuzione di ciascun passo del processo da 0 to n, per costruire tutti i termini $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$. Il termine a_n potrebbe essere definito come il piú grande numero decimale con n cifre il cui quadrato é inferiore a 2. Se $\mathbb{D}_n$ é l'insieme dei numeri decimali con n cifre, allora

$$a_n = \max\{d \in \mathbb{D}_n : d^2 \leq 2\}$$

Per esempio, $a_2 = 1.41$ é il piú grande numero decimale con due cifre tale che il suo quadrato non superi 2. Possiamo immaginare che $\mathbb{D}_n$ sia una sorta di righello per misurare la posizione dei numeri reali sulla retta. $\mathbb{D}_n$ é l'insieme dei multipli interi di 10^{-n}. Ad esempio, l'insieme $\mathbb{D}_2$ ha elementi come $0.87, 0.88, 0.89, 0.90, 0.91\ldots$, vale a dire che

$$\mathbb{D}_2 = \{0.01n : n \in \mathbb{Z}\} = \{nu_2 : n \in \mathbb{Z}\}$$

Useremo gli insiemi $\mathbb{D}_n$ per introdurre delle nozioni metriche sull'insieme dei numeri reali.
Nota storica. Il metodo iterativo che abbiamo appena visto, che consiste nel suddividere in dieci parti uguali l'intervallo di approssimazione di $[a_n, b_n[$ per determinare l'approssimazione successiva $[a_{n+1}, b_{n+1}[$, migliorando in questo modo la precisione di una cifra decimale, é giá presente nell'Arithmetica di Stevino che la impiega per calcolare in modo approssimato radici di polinomi di terzo grado ([4]).
Che cosa manca alla descrizione del processo iterativo appena visto? Trattandosi di un processo infinito, dobbiamo assicurarci che esso produca un risultato, cioé calcoli davvero qualcosa. Solo una proprietá molto forte dei numeri reali puó darci questa garanzia. L'obiettivo prossimo che ci poniamo é di analizzare con maggior precisione i processi infiniti dati dalle successioni di numeri reali, per rispondere ad alcune domande fondamentali. Quando si puó dire davvero che una successione calcola un numero reale e come si fa a stabilire se due successioni calcolano lo stesso numero?

5 Uguaglianza di numeri reali e limite di successioni

Dal momento che abbiamo introdotto il concetto di numero reale partendo da un caso particolare di successioni convergenti che sono le espansioni decimali infinite, é naturale aspettarsi che l'uguaglianza di due numeri reali sia collegata con qualche forma di equivalenza tra due successioni convergenti e quindi al concetto di limite.
Dal punto di vista cognitivo l'uguaglianza tra numeri reali presenta alcuni aspetti critici, fatto che non dovrebbe sorprendere essendo coinvolto il concetto di infinito. Sono ben note le difficoltá connesse all'accettazione dell'uguaglianza $0.9999\ldots = 1$ e le soluzioni proposte nella prassi didattica, per quanto ingegnose, nascondono da qualche parte qualche assunzione implicita sul modello dei numeri reali che in un modo o nell'altro ha a che fare con la proprietá di completezza o con il principio di continuitá.
Abbiamo introdotto i numeri reali come successioni di numeri, usando l'infinito potenziale, ma per dare loro il senso usuale con cui possono essere usati nel calcolo

dovremo specificarne le operazioni e le relazioni, a cominciare dall'uguaglianza. Al solito, anticipiamo la definizione formale con un esempio concreto. Sia a il numero reale che abbiamo chiamato "radice quadrata di 2", che conosciamo attraverso la sua espansione decimale infinita:

$$a_0 = 1, a_1 = 1.4, a_2 = 1.41, a_3 = 1.414, a_4 = 1.4142, a_5 = 1.41421, a_6 = 1.414213, \ldots$$

Un esperimento ci renderá piú convincente l'asserzione $a^2 = 2$. Generiamo i termini a_n e a_n^2 delle due successioni che definiscono a e a^2 facendo variare n da 1 a 100. Vedremo crescere la sequenza dei *nove* nel termine a_n^2:

$$1^2 = 1$$

$$1.4^2 = 1.96$$
$$1.41^2 = 1.9881$$
$$1.414^2 = 1.999396$$
$$1.4142^2 = 1.99996164$$
$$1.41421^2 = 1.9999899241$$
$$1.414213^2 = 1.999998409469$$
$$1.4142135^2 = 1.99999982368225$$
$$1.41421356^2 = 1.9999999933878736$$

I termini della sequenza a_n^2 si avvicinano a $1.9999\ldots$ mentre n cresce. Accettiamo per ora che $1.9999\ldots\ldots = 2$ come una convenzione che si rivelerá essere un caso particolare della nozione di uguaglianza che vogliamo introdurre. Useremo quindi la successione definita dal termine $b_n = 1.9\ldots9$, numero decimale finito con n *nove*, come espansione decimale che genera 2.
Che senso ha affermare che i due numeri reali a^2 e 2 sono uguali? Il significato intuitivo dell'enunciato $a^2 = 2$ é che piú cifre decimali prendiamo di a, ossia piú grande é la precisione dell'approssimazione a_n, piú vicino é il quadrato di a_n al numero decimale $b_n = 1.999\ldots9$, che approssima 2 con lo stesso grado di precisione.
Ci riduciamo a confrontare tra loro le approssimazioni a_n^2 e b_n delle due successioni. Adottiamo l'indice k del generico termine della successione (b_n) come grado della precisione di un'approssimazione e procediamo facendo variare $k = 0, 1, 2, \ldots$

- Se $k = 0$ allora $a_0^2[0] = a_1^2[0] = a_2^2[0] = \ldots = 1$ cioé $a_n^2[0] = b_0$ per ogni $n \geq 1$
- Se $k = 1$ allora $a_1^2[1] = a_2^2[1] = a_3^2[1] = \ldots = 1.9$, $a_n^2[1] = b_1$ per ogni $n \geq 1$

- Se $k = 2$ allora $a_3^2[2] = a_4^2[2] = a_5^2[2] = \ldots = 1.99$, $a_n^2[2] = b_2$, per ogni $n \geq 3$
- Se $k = 3$ allora $a_3^2[3 = a_4^2[3] = a_5^2[3] = \ldots = 1.999$, $a_n^2[3] = b_3$, per ogni $n \geq 3$

E cosí via, il senso dell'enunciato $a^2 = 2$ é che per qualsiasi grado di precisione k possiamo trovare un indice $N(k)$ tale che tutti i termini a_n^2 con $n \geq N(k)$ abbiano la stessa approssimazione $a_n^2[k] = b_k$ nell'insieme $\mathbb{D}_k$ dei numeri decimali con k cifre. Il senso geometrico dell'uguaglianza tra numeri reali che vogliamo introdurre é che la distanza tra $a_n^2[k]$ e b_k é inferiore a $u_k = 10^{-k}$ per ogni $n \geq N(k)$.
Nell'esperimento abbiamo messo a confronto due successioni, una é un'espansione decimale infinita (b_n), l'altra é una successione di numeri reali (a_n^2). Il confronto condotto attraverso un esperimento ci suggerisce una definizione di uguaglianza:
Definizione. Siano x, y due numeri reali, generati rispettivamente dalle successioni $(x_n), (y_n)$. Diremo che x é uguale a y se per ogni indice k esiste un numero reale $N(k)$ tale che $x_n[k] = y_n[k]$ per ogni $n \geq N(k)$.

Il guaio é che questa definizione é troppo restrittiva perché distingue 1 da $0.9999\ldots$. Abbiamo bisogno di un'uguaglianza appena un pó piú generale. Useremo la nozione di distanza d, definita sui numeri decimali finiti da

$$d(x, y) = |x - y|$$

e la successione $u_k = 10^{-k}$ che ci fornisce la scala decimale per misurare i numeri reali.

Definizione. Siano x, y due numeri reali, generati dalle successioni $(x_n), (y_n)$. Diremo che x é uguale a y se per ogni indice k esiste un numero naturale $N(k)$ tale che $d(x_n[k], y_n[k]) \leq u_k$ per ogni $n \geq N(k)$.

In pratica, stiamo richiedendo che la successione $(d(x_n, y_n))$ generi il numero 0. Suggeriamo a questo punto che si possa introdurre il limite di una successione di numeri reali, come generalizzazione dell'idea di uguaglianza tra numeri reali. Invece di due successioni generatrici di numeri reali, consideriamo il confronto tra una successione di numeri reali qualsiasi e la successione generatrice di un numero reale (qual é l'espansione decimale) proprio come nell'esperimento che abbiamo proposto.

Definizione. Sia x un numero reale, generato dalla successione (x_n). Sia (a_n) una successione di numeri reali. Diremo che x é il limite della successione (a_n) se per ogni indice k esiste un numero naturale $N(k)$ tale che $d(x_n[k], a_n[k]) \leq u_k$ per ogni $n \geq N(k)$

5.1 E' vero che $0.9999\ldots = 1$?

Se vogliamo mettere alla prova le concezioni di uno studente sui numeri reali, e i limiti delle successioni, spesso é sufficiente un semplice test come rispondere alla domanda "E' vero che $0.9999\ldots = 1$?". Le convinzioni degli studenti che rispondono "no" al test, in genere, sono ben radicate e resistenti ai tentativi di conversione dei loro insegnanti. In effetti, le difficoltá degli studenti ad accettare l'uguaglianza in questione sono giustificabili, non solo dal punto di vista psicologico, ma anche logico. Si possono, infatti, concepire dei modelli "non standard" dei numeri reali in cui l'enunciato $0.9999\ldots = 1$ non é valido. Basti pensare ai modelli "non-archimedei" in cui esistono numeri infinitesimali. Insomma, la questione é tutt'altro che banale e ha coinvolto anche matematici come Eulero che nei suoi "Elementi di Algebra" (1765) ritiene opportuno spiegare il motivo per cui $9.9999\ldots = 10$. E' interessante esaminare alcuni argomenti che nella pratica didattica vengono usati dagli insegnanti quando vogliono persuadere gli studenti della validitá dell'uguaglianza.

1) Si parte da un'assunzione che lo studente sia disposto ad accettare piú volentieri, come ad esempio $0.3333\ldots = \frac{1}{3}$, un'uguaglianza che, secondo Fischbein ([5]), gli studenti hanno meno difficoltá ad accettare come vera. Il passo successivo é risalire all'identitá $0.9999\ldots = 1$ moltiplicando a destra e a sinistra per 3. Il passaggio critico é $3 \times (0.3333\ldots) = 0.9999\ldots$ che nasconde la continuitá della "moltiplicazione per 3", fatta passare come un'estensione della proprietá distributiva dai decimali finiti alle espansioni decimali infinite.

2) Si usa un "trucco del mestiere" piú sofisticato, che tuttavia non convince del tutto gli studenti perché presenta analoghe criticitá del metodo precedente. Il docente esordisce: "poniamo che $x = 0.9999\ldots$" e prosegue moltiplicando per 10, a destra e a sinistra, per ottenere $10x = 9.9999\ldots$. Il noto effetto della moltiplicazione per 10, che sposta la virgola di un posto sui decimali finiti, viene esteso ai decimali infiniti. Di nuovo ritroviamo implicitamente la continuitá della moltiplicazione. Si riscrive poi l'equazione nella forma $10x = 9 + 0.9999\ldots$ e con una sostituzione perveniamo all'equazione $10x = 9 + x\ldots$, equivalente a $x = 1$.

3) Un metodo di natura affatto diversa consiste in un ragionamento per assurdo, per dedurre una contraddizione dall'assunzione che $0.9999\ldots < 1$. Il docente cerca di provare che non puó esistere un numero intermedio tra i due. Qui si sta assumendo implicitamente la proprietá di densitá per l'ordine dei numeri reali, ma l'interesse per questo tipo di approccio sta soprattutto nelle probabili obiezioni che possono provenire dagli studenti, sempre che il docente decida di aprire una discussione. Non é raro che qualche studente proponga l'idea che aggiungendo la cifra 5 oppure 6 oppure qualche altra cifra (ma non 9) dopo la sequenza infinita di nove, si ottiene un numero che sta in mezzo tra $0.9999\ldots$ e 1.

La ricerca in didattica della matematica ha cercato di spiegare le motivazioni per cui gli studenti hanno difficoltá ad acettare l'uguaglianza $0.9999\ldots = 1$. Tra gli articoli "storici" sull'argomento, ricordiamo Tall, Schwarzenberger ([6]), che hanno individuato la radice delle difficoltá in un conflitto cognitivo tra l'idea di $0.9999\ldots$ come un processo in divenire e il concetto di numero reale che é essenzialmente statico. In generale lo studente concepisce l'espansione decimale infinita $0.9999\ldots$ come un processo dinamico, una successione di numeri decimali che si avvicina a 1, senza mai raggiungerlo. Si ritrova in questa convinzione l'antico paradosso di Zenone, di Achille e la Tartaruga. Il conflitto tra essere e divenire che Aristotele aveva risolto negando l'esistenza dell'infinito attuale, ma ammettendo l'infinito potenziale. La concezione dello studente che rifiuta di accettare $0.9999\ldots = 1$ appartiene alla corrente di pensiero aristotelica. $0.9999\ldots$ é concepito come un'infinito potenziale, una successione di decimali finiti e non il suo limite 1. In ultima analisi, lo studente che pensa in modo aristotelico rifiuta l'infinito attuale di un'espansione decimale infinita come $0.9999\ldots$. Nella loro ricerca ([6]) Tall e Schwarzenberger classificano gli studenti in due tipi:

- Gli studenti che accettano l'uguaglianza $0.9999\ldots = 1$ pensano che la differenza tra i due numeri sia piú piccola di qualsiasi numero positivo.
- Gli studenti che non accettano l'uguaglianza $0.9999\ldots = 1$ pensano che $0.9999\ldots$ non possa mai essere uguale a 1, pur arrivando a distanza da 1 inferiore a qualsiasi distanza positiva.

E' curioso che gli studenti dei due schieramenti usino argomentazioni che partono da premesse equivalenti per giungere a conclusioni opposte.

6 Ordinamento dei numeri reali

Siano a, b due numeri reali, ciascuno generato dalla sua espansione decimale che assumeremo sia la forma standard. Descriviamo una procedura per confrontarli. Sappiamo che $a = b$ se $a[i] = b[i]$ per ogni indice i. Altrimenti, esiste un minimo numero naturale n tale che $a[n] \neq b[n]$. Se $a[n] < b[n]$ allora diremo che a é minore di b e scriveremo $a < b$, altrimenti $a[n] > b[n]$ e allora diremo che a é maggiore di b e scriveremo $a > b$.

Esercizio 1. Dimostrare che la relazione $<$ é totale, cioé per tutti i numeri reali a, b si verifica esattamente una delle tre condizioni $a < b, a = b, a > b$.

Esercizio 2. Dimostrare che la relazione $<$ é transitiva, cioé per tutti i numeri reali a, b, c, se $a < b, b < c$ allora $a < c$.

Proposizione 1. I numeri razionali formano un insieme denso per l'ordine nell'insieme ordinato dei numeri reali. Siano a, b due numeri reali tali che $a < b$. Allora esiste un numero razionale r tale che $a < r < b$.

Dedichiamo tutta l'attenzione ora alla proprietá di completezza dell'ordine che abbiamo suddiviso in due proposizioni, per evidenziare meglio i due argomenti che compongono la sua dimostrazione.

Proposizione 2. Sia $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots$ una successione crescente e limitata di numeri reali, cioé esiste un numero reale L tale che $a_0 \leq L, a_1 \leq L, a_2 \leq L, \ldots$. Allora per ogni indice k esistono un indice $N(k)$ ed un numero decimale con k cifre A_k tali che $a_n[k] = A_k$ per ogni $n \geq N(k)$.

Dimostrazione.

Assumeremo che per ogni n il numero reale a_n sia dato da un'espansione decimale infinita in forma standard
a_0 sia il limite della sua espansione decimale $a_0[0], a_0[1], a_0[2], \ldots$.
a_1 sia il limite della sua espansione decimale $a_1[0], a_1[1], a_1[2], \ldots$.
a_2 sia il limite della sua espansione decimale $a_2[0], a_2[1], a_2[2], \ldots$.
E cosí via.
L sia il limite della sua espansione decimale $L[0], L[1], L[2], \ldots$.
Fissato un indice k, abbiamo una successione crescente di numeri decimali nell'insieme $\mathbb{D}_k$:

$$a_0[k] \leq a_1[k] \leq a_2[k] \leq a_3[k] \leq \ldots$$

Tutti questi numeri sono limitati da $L[k]$:

$$a_0[k] \leq L[k], a_1[k] \leq L[k], a_2[k] \leq L[k], a_3[k] \leq L[k], \ldots$$

i numeri decimali $a_i[k]$ sono tutti elementi dell'insieme $\mathbb{D}_k$ e sono compresi tra $a_0[k]$ e $L[k]$. Sappiamo che c'è un numero finito di elementi dell'insieme discreto $\mathbb{D}_k$ in un qualsiasi intervallo limitato. Ne segue che $\{a_i[k] : i \in \mathbb{N}\}$ é un insieme finito ed ammette un massimo elemento $a_{N(k)}$. Ne deduciamo che $a_i[k] \leq a_N(k)[k]$ per ogni indice $i \in \mathbb{N}$. La successione $(a_i[k])$ é crescente, dunque gli $a_i[k]$ sono tutti uguali per ogni $i \geq N(k)$. La successione richiesta é data da $A_k = a_N(k)[k]$ per ogni k.

L'ultima proposizione ci fornisce un metodo per associare una successione (A_n) di numeri decimali ad ogni successione crescente e limitata di numeri reali $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots$. Vedremo che questa successione (A_n) é proprio l'espansione decimale di un numero reale che é il limite della successione (a_n).

Proposizione 3. Sia $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots$ una successione crescente e limitata di numeri reali. Allora la successione di numeri decimali ad essa associata (A_k) é l'espansione decimale di un numero reale.

Dimostrazione.

1) La prima condizione che una successione deve soddisfare, per essere l'espansione decimale di un numero reale, é che per ogni indice k il termine A_k sia un numero decimale con k cifre. Infatti, A_k é lo stesso termine $a_n[k]$ per qualche $n \in \mathbb{N}$ e questo é un elemento della griglia $\mathbb{D}_k$ dei numeri decimali con k cifre.

2) La seconda condizione é che $A_{k+1}[k] = A_k$ per ogni indice k. Infatti, da
$A_{k+1} = a_n[k+1]$ per ogni $n \geq N(k+1)$ e
$A_k = a_n[k]$ per ogni $n \geq N(k)$,
deduciamo che per ogni $n \geq max(N(k+1), N(k))$, si ha
$A_{k+1}[k] = a_n[k+1][k] = a_n[k] = A_k$.

Esercizio 3. Dimostrare che la successione (a_n), dove $a_n = \frac{n^2}{2n^2+1}$ é convergente. La funzione definita da $f(x) = \frac{x^2}{2x^2+1}$ é monotona. Infatti,

$$f(x) = \frac{1}{2 + \frac{1}{x^2}} = r(g(r(q(x))))$$

dove le funzioni r, g, q sono definite come

$$r(x) = \frac{1}{x}, g(x) = 2 + x, q(x) = x^2$$

I valori delle successioni intermedie $(\frac{1}{n^2})$, $(2+\frac{1}{n^2})$, sono tutti positivi e nell'intervallo dei numeri reali positivi le funzioni r, g, q sono tutte monotone, per cui anche f é monotona sull'intervallo dei reali positivi, e $a_n = f(n)$ é una successione monotona. SI verfica che é una successione crescente per una questione di paritá sul numero delle sue componenti decrescenti.

Esercizio 4. Dimostrare che la successione (a_n), dove $a_n = \frac{n^2}{2n^2+1}$ converge a $\frac{1}{2}$.

7 Osservazioni finali.

Il lavoro come questo é un insieme di idee e suggerimenti, originati sia dall'esperienza diretta che da approfondimenti nella letteratura.Inevitabilmete, si sono presi in considerazione solo alcuni aspetti, trascurandone degli altri. Vorrei terminare accennando a due questioni che hanno un certo rilievo con il tema affrontato in questa relazione. La prima questione riguarda gli ostacoli cognitivi che gli studenti incontrano quando passano dai numeri interi ai numeri decimali. Osservo che molte difficoltá sono causate dalla naturale propensione ad estendere le proprietá dei numeri naturali ai numeri decimali. Ad esempio, é controintuitivo per molti

studenti che una moltiplicazione possa far diminuire il valoredi una grandezza numerica mentre una divisione possa farlo aumentare.
Un altro aspetto che ho rimandato a questa sezione, ma che gioca un ruolo importante, riguarda le difficoltá cognitive che gli studenti incontrano con la nozione di successione. Certamente contribuisce alle difficoltá il fatto che il concetto sia complesso e presupponga altri concetti ed abilitá. Tall e Vinner hanno individuato una serie di misconcezioni ([9]):

1) Una successione é un elenco o lista di numeri ordinata.

2) Ogni successione é monotona crecente oppure decrescente.

3) Ogni successione ammette una regolaritá ed é definibile da una regola.

4) Ogni successione ha un ultimo termine.

Per quanto riguarda il concetto di "successione convergente" emergono ulteriori difficoltá ([9]):

1) Se la successione (a_n) converge a L allora nessun termine a_n puó coincidere con L.

2) Se ogni intorno di L contiene termini di una successione (a_n) allora (a_n) converge a L.

3) Lo studente confonde l'ordine delle variabili n, ϵ nella definizione di convergenza.

4) Se una successione (a_n) converge a L allora L é l'ultimo termine della successione.

8 Bibliografia

1. Neugebauer O., *Le Scienze Esatte nell'Antichitá*, Feltrinelli, 1974, Milano.

2. Zellini P., *Gnomon*, Biblioteca Scientifica Adelphi, 1999, Milano.

3. Euclide, *Gli Elementi*, edizione a cura di A. Frajese, L. Maccioni, Utet, 1970 Torino.

4. Struik D. J., *The Principal Works of Simon Stevin. Volume II: Mathematics*, Swetz and Zeitlinger, 1958, Amsterdam.

5. Fischbein E., *Infinity: The never-ending struggle*, Educational Studies in Mathematics 48, 309-329, 2001.

6. Tall D. O., Schwarzenberger R. L. E., *Conflicts in the learning of real numbers and limits*, Matematics Teaching 82, 44-49, 1978.

7. Galilei G., *Le operazioni del compasso geometrico e militare*, 1606, Padova.

8. Knorr W., *The evolution of the Euclidean Elements*, Reidel, 1975, Dordrecht.

9. Tall D., Vinner S. *Concept images and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*, Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169, 1981