

## CONGRUENZE

Cosa succede quando vogliamo calcolare il risultato di una equazione ? Ad es  $3x = 2$  si risolve conoscendo il valore del **reciproco di 3**, indichiamolo con  $3^{-1}$  ; quindi si moltiplica per  $3^{-1}$  tutte due le parti, dx e sx, dell'equazione. E se ci fosse un "reciproco diverso" dai soliti razionali che ben conosciamo ?

Questo accade nel caso delle **congruenze**: "Trova un numero il cui triplo dia resto due se diviso per 5". Questa richiesta si traduce nella equazione:

$$3x = 2 + 5h$$

oppure nella congruenza

$$3x \equiv 2 \pmod{5}$$

In questo caso il "reciproco di 3" non è  $1/3$ ; lo vediamo se costruiamo la tabella moltiplicativa

x mod. 5	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Dalla tabella si vede che il reciproco di 3, cioè quel numero che moltiplicato per 3 è uguale 1 mod. 5, è il numero 2: infatti

$$3 \cdot 2 = 6 = 5 + 1 \equiv 1 \pmod{5}.$$

Quindi la congruenza  $3x \equiv 2 \pmod{5}$  si risolve moltiplicando a dx e a sx per 2, cioè la soluzione è  $x \equiv 4 \pmod{5}$ . Le soluzioni della congruenza sono infinite: tutti i numeri dell'elenco 4, 9, 14, 19, 24, 29 .. etc, cioè  $x = 4 + 5h$ .

### Esercizio 1

Risolvi la congruenza  $4x \equiv 3 \pmod{5}$

### Esercizio 2

Costruisci la tabella moltiplicativa per le congruenze mod. 7 (divisioni con resto per 7)

Non sempre tuttavia conviene costruire l'intera tabella moltiplicativa. Spesso sarà sufficiente calcolare il reciproco del numero che ci serve.

### Esercizio 3

Risolvi la congruenza  $9x \equiv 2 \pmod{13}$

E' importante notare che queste tecniche funzionano senza problemi solo se il divisore, cioè il numero che caratterizza le congruenze, è un numero primo ( **congruenze mod. p** ).

Se non è un numero primo, può accadere che la congruenza data non abbia soluzione.

### Esercizio 4

Risolvi la congruenza  $6x \equiv 2 \pmod{9}$

A volte però, anche se il divisore non è primo, la congruenza ha ugualmente soluzione: dipende dal fatto che il coefficiente della x sia, oppure no, coprimo col divisore.

### Esercizio 5

Risolvi la congruenza  $5x \equiv 4 \pmod{9}$