Equazioni diofantee 17 marzo 2016 Zero alla zero

Determinare tutte le coppie (x, y) di numeri interi che **7x – 5y = 2**

Risposta: $\begin{cases} x = -4 + 5 \cdot n \\ y = -6 + 7 \cdot n \end{cases}$ $con\ n$ int

se applichiamo l'algoritmo di Euclide alla coppia (7, 5), otteniamo:
(I) 7 = 1. 5 + 2 quindi (I') 2 = 7 − 1 ・5
(II) 5 = 2. 2 + 1 quindi (II') 1 = 5 − 2 ・2
(III) 2 = 1. 2 + 0.
A questo punto riusciamo a esprimere 1 come combinazione intera dei numeri 7 e 5 nel modo seguente:
1 = 5 – 2・2 = 5 – 2 (7 − 5・1) = − 2・7 + 3・5.
Abbiamo quindi trovato che:
7・(−2) + 5・3 = 1
e quindi, moltiplicando ambo i membri per 2, otteniamo
7・(−4) + 5・6 = 2
cioè (−4, −6) è una soluzione di (1)
Per trovare **tutte** le soluzioni intere di (1), osserviamo che, prese due qualsiasi coppie di interi (x_1, y_1) e (x_2, y_2) che la soddisfino, si avrà (ovviamente) che $7x_1 – 5y_1 = 2$ e $7x_2 – 5y_2 = 2$, quindi, sottraendo membro a membro, si otterrà:

$$7 (x_1 − x_2) – 5 (y_1 − y_2) = 0.$$

Detto in altre parole, se (x1, y1) e (x_2, y_2) sono entrambe soluzioni di (1), allora la loro differenza è una soluzione intera dell'equazione diofantea

$$(2)\ 7x – 5y = 0.$$

Ciò significa che per trovare tutte le soluzioni intere di (1) basterà trovarne una sola (x_0, y_0), dopodiché tutte le altre si troveranno aggiungendo a (x0, y0) una soluzione di (2).
Notiamo che se (x', y') è una soluzione di (2), si avrà 7x' = 5y', ed essendo 7 e 5 primi tra loro, necessariamente x' sarà un multiplo di 5 e y' un multiplo di 7.
Di conseguenza le soluzioni di (2) sono tutte e sole le coppie (x*, y*) del tipo:

$$(3)\ \begin{cases} x^* = 5 \cdot n \\ y^* = 7 \cdot n \end{cases} \quad con\ n\ \text{int}$$

Trovare tutti gli interi x e y che risolvono

2010x + 1997y = 1 **199x + 601y = 17** **17x + 43y = 9999**