Parità

Mario Puppi

1. Una tecnica per risolvere problemi

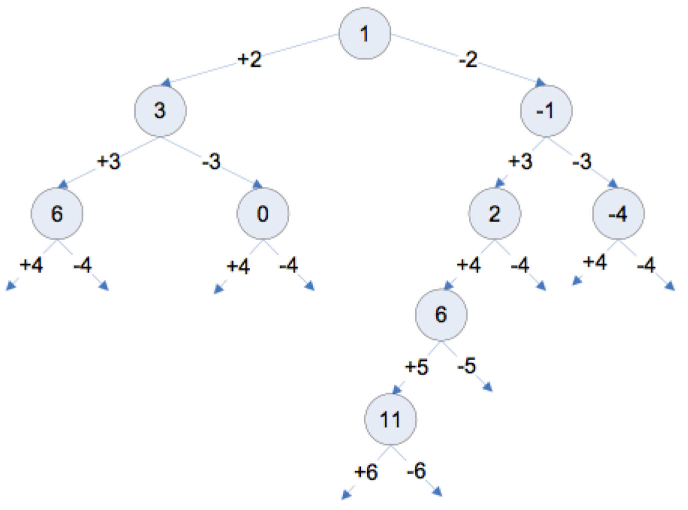
La nozione di *parità* è una tecnica fondamentale per risolvere problemi, usata in tutte le discipline scientifiche. Cominciamo a prendere confidenza con un primo esempio.

Esempio 1. I numeri naturali 1, 2, …, 9, 10 sono scritti alla lavagna. Marco sceglie due di questi numeri, li cancella e scrive alla lavagna il valore assoluto della loro differenza. Marco ripete la stessa istruzione con i numeri rimanenti e va avanti così finchè rimane sulla lavagna un solo numero. Questo numero potrebbe essere 4?

Soluzione. La risposta è no, impossibile. Spieghiamo perché. Quando Marco applica la procedura di cancellare due numeri e sostituirli con il valore assoluto della loro differenza diciamo che fa una *mossa*. La situazione dei numeri scritti alla lavagna diremo invece che è uno *stato*. In pratica, il processo è una sequenza di 9 mosse, con uno stato iniziale di 10 numeri e uno stato finale di 1 solo numero. In tutto, 10 stati. Ci sono delle quantità, dipendenti dai numeri scritti alla lavagna, cioè dallo stato, che cambiano durante il processo. Ad esempio, la quantità N di numeri scritti alla lavagna cambia, da 10 a 9, poi 8, … infine 1. N diminuisce di 1 ad ogni mossa. Questo non ci è di grande aiuto. Anche la somma dei numeri cambia e diminuisce ad ogni mossa, in un modo però che sembra imprevedibile e questo ci aiuta ancora meno. Un'altra quantità è data dalla quantità D di numeri dispari che si trovano scritti sulla lavagna. Una semplice analisi di casi, ci mostra che, ad ogni mossa sono possibili due casi: D diminuisce di 2 (i due numeri cancellati erano entrambi dispari) oppure D rimane invariato (in tutti gli altri casi, incredibile ma vero). Abbaimo trovato l'invariante che ci serve: la quantità di numeri dispari sarà sempre un numero dispari, in tutto il processo. Dunque, è impossibile terminare con un numero pari come 4, perché in tale stato il valore di D è 0, che è pari.

Problema 2. Una scacchiera rettangolare contiene in ogni casella un numero naturale. La somma dei numeri in ogni riga e in ogni colonna è pari. Dimostrare che la somma dei numeri nelle caselle nere è pari.

Problema 3. Alice scrive su una riga i numeri 1, 2, 3, …, 2001, poi inserisce un segno + oppure – in mezzo ad ogni coppia di numeri consecutivi, quindi calcola l'espressione risultante. E' possibile che Alice ottenga il risultato 0?



2. Altri problemi.

Problema 4. Un salone contiene inizialmente 10 persone. Ad ogni minuto accade esattamente uno dei due eventi:
(a) entrano due persone
(b) escono tre persone.
Dopo che sono trascorse 2 ore quali delle asserzioni seguenti sono certamente false:

(1) nel salone ci sono 0 persone
(2) nel salone ci sono 40 persone
(3) nel salone ci sono 21 persone
(4) nel salone ci sono 23 persone

Problema 5. Un esperimento fisico coinvolge particelle elementari di tre tipi: *A, B, C*. Le leggi della fisica dicono che in un'interazione tra una particella di tipo *A* e una di tipo *B*, entrambe le particelle svaniscono e nascono due particelle di tipo *C*. Da un'interazione tra una particella di tipo *B* e una di tipo *C*, entrambe le particelle svaniscono e si creano due particelle di tipo *A*. Infine, un'interazione tra una particella di tipo *C* e una di tipo *A* farà nascere due particelle di tipo *B* al posto delle due particelle iniziali. Supponiamo che iall'inizio vi siano 10 particelle di tipo *A*, 11 di tipo *B* e 112 di tipo *C*.
Quali delle asserzioni seguenti sono certamente false?

(1) prima o poi il numero di particelle di tipo *A* sarà uguale al numero di particelle di tipo *B*
(2) prima o poi il numero di particelle di tipo *A* sarà uguale al numero di particelle di tipo *C*
(3) prima o poi il numero di particelle di tipo *B* sarà uguale al numero di particelle di tipo *C*

Problema 6. Tre rane si trovano su tre dei quattro vertici di un quadrato. Ogni minuto una rana, che occupa il punto *X*, salta un'altra rana, che occupa il punto *Y*, in modo da terminare in un punto che è il simmetrico di *X* rispetto a *Y*. E' possibile che continuando a saltare in questo modo una delle rane raggiunga il centro del quadrato?

Problema 7. Sulla lavagna vengono scritti i numeri 1, 2, 3, …, 21 e si ripete per 20 volte l'istruzione (1) seguente:

(1) cancellare una coppia di numeri *x, y* alla lavagna e scrivere al suo posto il numero *xy+x+y*"

Alla fine di questo processo, rimarrà scritto un unico numero, il *risultato del processo*. Quanti sono i numeri distinti che si possono ottenere con questa procedura?