

## TEOREMA CINESE DEL RESTO

### Problema introduttivo

Vogliamo trovare un numero  $X$  che abbia come resto della divisione per 7 pari a 2 e come resto della divisione per 15 pari a 4.

### Soluzione

I numeri 7 e 15 sono primi fra loro. Con queste condizioni la soluzione non è unica: ce ne sono infinite, distanti fra loro come il prodotto  $7 \times 15 = 105$ . Quindi basta trovarne una, la chiamiamo  $X_0$ , tutte le altre soluzioni sono della forma:

$$X_0 + k105$$

Per trovare la prima soluzione si può andare per tentativi, elencando i multipli di 7 (a cui aggiungere 2), e i multipli di 15 (a cui aggiungere 4). Il primo numero comune ai due elenchi è il nostro  $X_0$ .

2,9,16,23,30,37,44,51,58,65,72,79,86,93,100,107, 114,128,135,142,149,156, e così via;  
4,19,34,49,64,79,94,109,124,139,154, e così via.

Il primo numero naturale comune ai due elenchi è 79: infatti  $79 = 15 \times 5 + 4 = 7 \times 11 + 2$ .

Quindi tutte le soluzioni cercate sono:  $79 + k105$ .

Ma ad elencarli tutti è lento ... potrebbe essere necessario fare elenchi lunghissimi.

Introduciamo allora i "Numeroni": si tratta del **mcm di tutti i divisori meno uno**, cosa che diventa fondamentale quando le divisioni considerate sono almeno tre. Nel nostro caso i "Numeroni" altro non sono che i divisori stessi, dato che ci sono solo due divisori ( $2 - 1 = 1$ ).

Partendo da:

$x = 2 + n7$	e	$x = 4 + m15$	si ricorda il simbolo di congruenza
$x \equiv 2 \pmod{7}$	e	$x \equiv 4 \pmod{15}$	
$N_1 = 15$		$N_2 = 7$	

si usano ora i "numeroni", risolvendo invece:

$$N_1 x_1 \equiv 2 \pmod{7} \quad N_2 x_2 \equiv 4 \pmod{15}$$

cioè:

$15 x_1 \equiv 2 \pmod{7}$ ,	$7 x_2 \equiv 4 \pmod{15}$	(dato che $7 \times 13 = 91 \equiv 1 \pmod{15}$ )
$x_1 \equiv 2 \pmod{7}$ ,	$x_2 \equiv 7 \pmod{15}$	( $13 \times 4 = 52 \equiv 7 \pmod{15}$ )

da cui si ricava la  $X_0$ :

$$X_0 = N_1 x_1 + N_2 x_2 = 15 \times 2 + 7 \times 7 = 79.$$

**Notiamo che questo metodo funziona se i divisori sono primi fra loro. (c'è un teorema ..)**

### La legione Z.

Di ritorno dalla faticosa campagna militare di Cesenaticus, la legione Zeta, agli ordini del console Mario Puppius, si ritrova con delle perdite: si tratta principalmente della gens "Boltionella", che si attarda abitualmente nelle taverne e nelle bettole per giocare alla LudoStationes. Il numero iniziale dei legionari era di 25mila. Ad una rapida occhiata, il console Mario si avvede che mancano all'appello alcune centinaia di soldati. Per procedere al conteggio utilizza il metodo delle file di diverso numero: basta contare i resti e in un attimo si saprà quanti sono i dispersi. I legionari, prontamente grazie all'addestramento, si dispongono in fila per 7 e ne restano fuori cinque. Si dispongono poi celermente in fila per 10, e ne restano nove. In fila per 11, e ne restano due, così come due ne restano quando si dispongono in fila per 13. Quanti sono i dispersi ?

### Soluzione

In questo caso le congruenze sono quattro e tanti dovranno essere i Numeroni:

$$x = 5 + n7 = 9 + m10 = 2 + p11 = 2 + q13$$

$$x \equiv 5 \pmod{7} \quad , \quad x \equiv 9 \pmod{10} \quad , \quad x \equiv 2 \pmod{11} \quad , \quad x \equiv 2 \pmod{13}$$

$$N_1 = 10 \times 11 \times 13 = 1430, \quad N_2 = 7 \times 11 \times 13 = 1001, \quad N_3 = 7 \times 10 \times 13 = 910, \quad N_4 = 7 \times 10 \times 11 = 770.$$

Le congruenze da risolvere saranno quindi:

$$N_1 x_1 \equiv 5 \pmod{7} \quad , \quad N_2 x_2 \equiv 9 \pmod{10} \quad , \quad N_3 x_3 \equiv 2 \pmod{11} \quad , \quad N_4 x_4 \equiv 2 \pmod{13}$$

$$1430 x_1 \equiv 5 \pmod{7} \quad , \quad 1001 x_2 \equiv 9 \pmod{10} \quad , \quad 910 x_3 \equiv 2 \pmod{11} \quad , \quad 770 x_4 \equiv 2 \pmod{13}$$

$$\begin{array}{cccc} 2x_1 \equiv 5 \pmod{7} & , & x_2 \equiv 9 \pmod{10} & , & 8x_3 \equiv 2 \pmod{11} & , & 3x_4 \equiv 2 \pmod{13} \\ x_1 \equiv 6 \pmod{7} & , & x_2 \equiv 9 \pmod{10} & , & x_3 \equiv 3 \pmod{11} & , & x_4 \equiv 5 \pmod{13} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Da cui si ricava la soluzione} \quad X_0 &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 = \\ &= 1430 \times 6 + 1001 \times 9 + 910 \times 3 + 770 \times 5 = 24.169. \end{aligned}$$

l'unica possibilità minore di 25mila, quindi la soluzione cercata è  $25000 - 24169 =$  **831 dispersi.**