

Mario Puppi

1. Nell'*Ars Conjectandi*, Bernoulli descrive la combinatoria come l'arte di enumerare un insieme di oggetti e classifica così i problemi fondamentali:

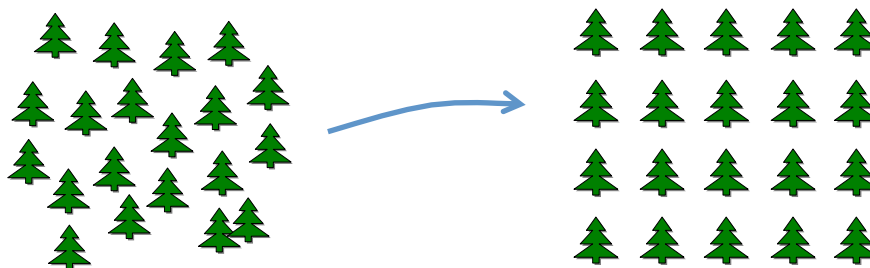
- a) esiste una certa configurazione combinatoria?
- b) quanti elementi ci sono in un insieme combinatorio?
- c) enumerare gli elementi di un insieme combinatorio

Vogliamo studiare una metodologia per la risoluzione di problemi combinatori. Partiremo da situazioni problematiche concrete per introdurre le leggi generali del contare. Una bella notizia è che i requisiti teorici necessari sono davvero pochi, le più elementari nozioni di teoria degli insiemi e di aritmetica. In compenso i problemi possono essere davvero molto difficili.

2. Le leggi del contare e le operazioni aritmetiche.

Un metodo naturale per contare un insieme consiste nel dargli una struttura. Il primo esempio che vediamo è la struttura prodotto. Grosso modo possiamo dire che le strutture fondamentali per i modelli combinatori corrispondono alle operazioni dell'aritmetica. In effetti, la scoperta di strutture fu un passo decisivo nello sviluppo dell'abilità di contare nella storia del pensiero umano. La struttura prodotto corrisponde al prodotto dell'aritmetica.

Per contare grandi insiemi di oggetti è utile dare loro una struttura e il prodotto è una delle prime strutture scoperte per la loro efficienza nella soluzione del problema di contare.



In generale nel problema del contare gli insiemi, che sono privi di struttura, emerge l'idea di usare delle forme, con cui si possono costruire tipi di dati per costituire nuovi insiemi da insiemi più semplici. Ad ogni particolare tipo di dati che vedremo associeremo una 'regola aritmetica' che useremo per contare gli insiemi che sono di quel particolare tipo. Abbiamo così le *leggi del contare*.

3. La struttura somma e la legge della somma.

Una struttura fondamentale e familiare è la *somma*. Ad esempio, se si vuole calcolare quanti sono gli alunni iscritti ad una scuola si può sfruttare il fatto che l'insieme da contare è una 'somma di classi', cioè un'unione di insiemi a due a due disgiunti. Conoscere il numero di studenti di ciascuna classe è sufficiente per contare il numero di studenti della scuola.

La legge di addizione corrisponde alla struttura somma. Supponiamo che un insieme A sia la somma di due insiemi B e C , cioè $A = B \cup C$ e $B \cap C = \emptyset$. In tal caso, scriveremo $A = B + C$ ed in effetti il numero di elementi di A è la somma del numero degli elementi di B e del numero degli elementi di C .

Parlando di somma è naturale pensare alla differenza. In generale, come non esiste sempre la differenza di due numeri naturali, così non esiste sempre la differenza di due insiemi:

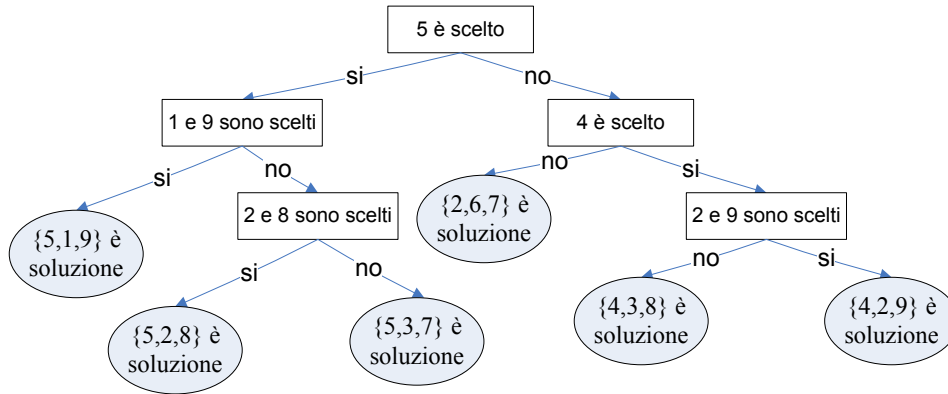
Problema della differenza. Dati due insiemi A e B trovare, se esiste, un insieme X tale che $A = B + X$.

Se questo problema ammette una soluzione B allora essa è unica. L'insieme B è sottoinsieme di A e la soluzione unica, siccome dipende da B viene indicata con B^* e si chiama complementare di B (in A).

4. Problema. Scelti 7 numeri distinti tra 1, 2, ..., 9 dimostrare che ne esistono sempre 3 la cui somma è 15.

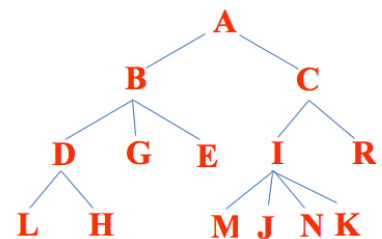
Sia S l'insieme di tutte le scelte di 7 numeri distinti tra 1, 2, ..., 9. Una 'buona scelta', è un insieme che contiene tre elementi la cui somma è 15. Un sottoinsieme B di S è *buono* se tutti i suoi sottoinsiemi con 7 elementi sono delle buone scelte. Occorre provare che S è *buono*.

Un'analisi su S , di tipo binario, mostra che $S = A+B$, dove A è l'insieme delle scelte contenenti 5 e $B = A^*$ è il complementare di A in S . Siano C l'insieme delle scelte contenenti 5, 1, 9 e D il suo complementare in A , per cui $A = C+D$. Analogamente, $B = E+F$, dove E è l'insieme delle scelte contenenti 2, 9 ma non 4 e F è il suo complementare in B .

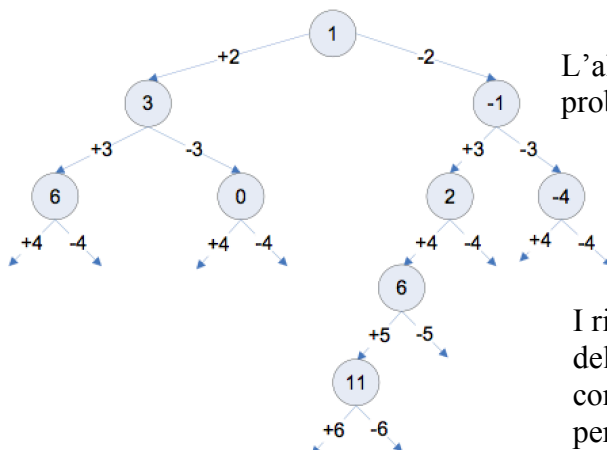


Un buon modo di visualizzare l'insieme S è la rappresentazione ad albero binario, in cui i nodi sono proposizioni della forma "x è un numero scelto" oppure "x e y sono entrambi numeri scelti". Al 1° livello dell'albero si ha la scomposizione $S = A + B$, al 2° livello si ha la scomposizione $S = (C+D)+(E+F)$. Già si vede che C, E sono insiemi buoni. L'analisi procede allora su D, F e al terzo livello si riuscirà a provare che anche loro sono buoni. Ne segue che S è un buon insieme perché *una somma di insiemi buoni è un insieme buono*.

5. Alberi. L'albero è la struttura naturale generata dall'operazione di somma. Un albero non è altro che un'espressione di somme di somme di ... somme di insiemi. Ad esempio, un insieme A tale che $A = B+C, B = D+G+E, C = I+R, I = M+J+N+K, D = L+H$ non è altro che l'albero a lato.



6. Problema. Alice scrive su una riga i numeri 1, 2, 3, ..., 2001, poi inserisce un segno + oppure - in mezzo ad ogni coppia di numeri consecutivi, quindi calcola l'espressione risultante. Dimostrare che Alice non può mai ottenere il risultato 0.



L'albero mostra un'idea per risolvere il problema di Alice.

I risultati delle somme parziali, sui nodi dello stesso livello, mostrano un comportamento regolare, con parità periodica.