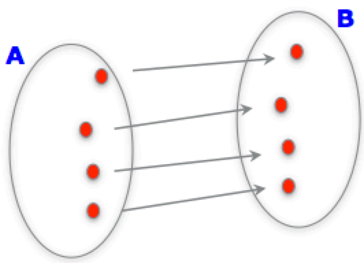
Zero alla zero - novembre 2015

Che cosa c'entra Eulero con i palloni da calcio?

Mario Puppi

1. Il linguaggio delle relazioni

Le relazioni tra due insiemi sono uno strumento usato sia per comunicare, i diagrammi a volte sono meglio delle equazioni, che per descrivere e risolvere problemi.



Esempio 1. Siano dati due insiemi **A**, **B** tali che **A** abbia ***a*** elementi e **B** ne abbia ***b***. allora l'esistenza di una funzione biiettiva da **A** in **B** permette di dedurre ***a*** = ***b***

Questa idea può essere generalizzata ad altri tipi di relazioni che non siano le funzioni biiettive, vediamo come.

2. Palloni da calcio

Un pallone da calcio lo si può pensare come un poliedro convesso le cui facce sono pentagoni (neri) oppure esagoni (bianchi).
Da una prima osservazione:

- ogni lato di un pentagono coincide con il lato di un unico esagono
- i 6 lati di ogni esagono sono incidenti, in modo alternato, a 3 pentagoni e a 3 esagoni
- ogni vertice è incidente a un pentagono e a due esagoni

Lipsia 2006 **FIFA World Cup**

Leonhard Euler

Questione 1. E' possibile dedurre da queste informazioni il numero esatto di pentagoni e di esagoni del pallone da calcio?

Per risolvere il problema faremo uso della famosa formula di Eulero che fornisce una relazione tra il numero **V** di vertici, il numero di spigoli **S** e il numero **F** di facce, valida in tutti i poliedri convessi:

$$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{f} = \boldsymbol{s}+2$$

La formula di Eulero e le tre informazioni sono sufficienti per risolvere il problema? Dobbiamo osservare meglio il pallone per cogliere altri dati utili o è arrivato il momento di buttarci a capofitto nella sola matematica?

Le variabili in gioco sono ***v***, ***f*** , ***s*** e abbiamo già un'equazione. Se riusciamo a scriverne altre due, forse abbiamo finito. Possiamo ricavare due equazioni dalle informazioni che abbiamo dedotto osservando il pallone?
Abbiamo bisogno di una tecnica che ci permetta di fare proprio questo. Apriamo ora una grossa parentesi per impadronirci di nuovi strumenti per ricavare equazioni da relazioni.

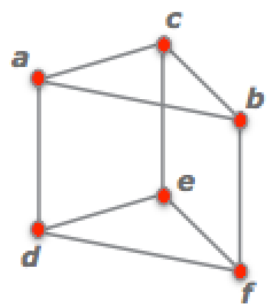
3. Il linguaggio delle relazioni: incidenza in un poliedro

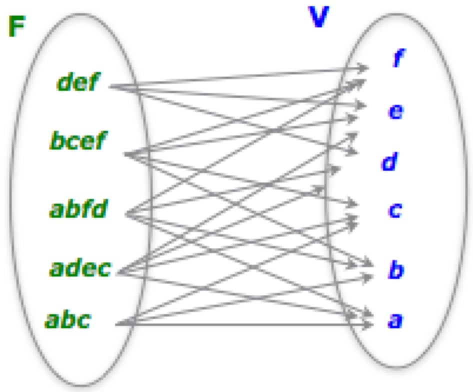
Esempio 2. Consideriamo il prisma con basi i due triangoli *abc* e *def*.

(1°) L'insieme dei vertici è **V** = {*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*}}

(2°) L'insieme degli spigoli è **S** = {*ab*, *ac*, *ad*, *bc*, *bf*, *ce*, *de*, *df*, *ef*}

(3°) L'insieme delle facce è **F** = {*abc*, *adec*, *abfd*, *bcef*, *def*}





I vertici sono 6

Ogni vertice è in relazione con 3 facce

Il grafo della relazione ha 6x3 frecce

Le facce sono 2 triangoli e 3 rettangoli

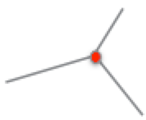
Ogni triangolo è in relazione con 3 vertici

Ogni rettangolo è in relazione con 4 vertici

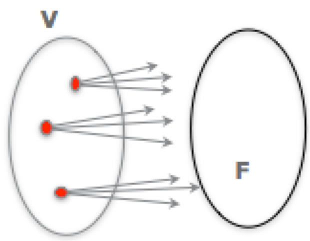
Il grafo della relazione ha 2x3+3x4 frecce

4. Applicazioni delle relazioni al pallone da calcio

Possiamo ora ritornare al pallone e precisamente dalla relazione R tra l'insieme **V** dei vertici e l'insieme **F** delle facce:

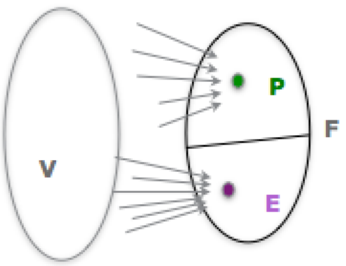


1° Ogni vertice è incidente con tre facce



La relazione R è un insieme di frecce, e ci sono 3 frecce per ogni vertice.

Se i vertici sono ***v*** allora la relazione R ha 3***v*** frecce



Siano **p** i pentagoni e siano **e** gli esagoni

Ogni pentagono è in relazione con 5 vertici:

5***p*** frecce terminano in **P** (insieme dei pentagoni)

Ogni esagono è in relazione con 6 vertici:

6***e*** frecce terminano in **E**

Le frecce che entrano in **F** sono 5**p**+6**e**

Il numero di frecce della relazione R è sempre lo stesso:

$$3\boldsymbol{v} = 5\boldsymbol{p} + 6\boldsymbol{e}$$

Esercizio 1. Si consideri la relazione R_2 dall'insieme **S** degli spigoli all'insieme **F** delle facce del pallone da calcio. Lo spigolo *x* è in relazione R_2 con la faccia *y* se *x* è incidente con *y*. Usare la tecnica precedente per dedurre dalla relazione R_2 l'equazione $2\boldsymbol{s} = 5\boldsymbol{p} + 6\boldsymbol{e}$

Se avete letto la pagina precedente e avete completato l'esercizio 1 allora ne sapete abbastanza per arrivare alla conclusione della questione 1. Siamo in grado di dedurre il numero esatto di pentagoni del pallone da calcio.

Dividiamo per 2 l'equazione $2\boldsymbol{s} = 5\boldsymbol{p} + 6\boldsymbol{e}$ per ricavare $\boldsymbol{s} = 5/2\, \boldsymbol{p} + 6/2\, \boldsymbol{e}$

Dividiamo per 3 l'equazione $3\boldsymbol{v} = 5\boldsymbol{p} + 6\boldsymbol{e}$ per ricavare $\boldsymbol{v} = 5/3\, \boldsymbol{p} + 6/3\, \boldsymbol{e}$

Infine, applichiamo la formula di Eulero: $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{f} - \boldsymbol{s} = 2$ per dedurne:

$$\begin{aligned}(5/3\, \boldsymbol{p} + 6/3\, \boldsymbol{e}) + (\boldsymbol{p} + \boldsymbol{e}) - (5/2\, \boldsymbol{p} + 6/2\, \boldsymbol{e}) &= 2 \\ 5/3\, \boldsymbol{p} + \boldsymbol{p} - 5/2\, \boldsymbol{p} &= 2 \\ \boldsymbol{p} &= 12\end{aligned}$$

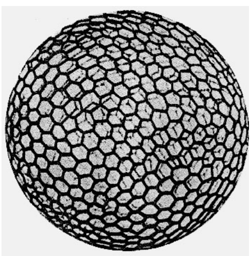
Abbiamo visto che un pallone da calcio avrà per forza 12 pentagoni. Ma quanti sono gli esagoni? Quali informazioni ci mancano per ricavare il numero degli esagoni? In fondo, basterebbe prendere un pallone e mettersi a contare per avere la risposta all'ultima domanda. Ma la questione che vogliamo porre è sottilmente diversa. Le informazioni che abbiamo assunto come ipotesi per dedurre il numero dei pentagoni erano di tipo locale, nel senso che riguardavano la relazione di un oggetto, sia esso vertice, faccia oppure spigolo, con i propri vicini. Ad esempio, da un vertice escono sempre tre spigoli, uno spigolo termina sempre in due vertici, un pentagono ha sempre 5 spigoli di contorno, … Ragionando solo su informazioni locali come queste è possibile dedurre il numero di esagoni? Fissiamo le idee con una definizione, in modo da riformulare la domanda in modo più preciso.

Definizione 1. Un *pallone da calcio generalizzato* è un poliedro convesso le cui facce sono pentagoni (neri) oppure esagoni (bianchi) ogni lato di un pentagono è incidente solo ad esagoni e i lati di ogni esagono sono incidenti, alternativamente a pentagoni ed esagoni.

Questione 2. Un pallone da calcio generalizzato ha necessariamente 12 pentagoni. Potete trovare palloni da calcio generalizzati che abbiano un numero di esagoni diverso da quello del pallone da calcio normale? Quali valori può assumere questo numero?

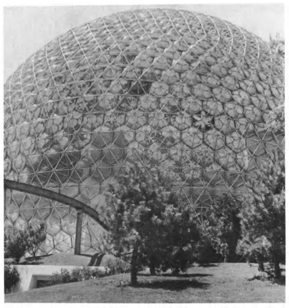
5. Problemi.

Problema 1. Le facce di un poliedro convesso sono quadrangolari oppure esagonali e in ogni vertice concorrano tre spigoli. Quanti sono i quadrangoli che ricoprono il poliedro?



Problema 2. Alcuni *radiolari*, animali acquatici unicellulari, hanno uno scheletro poliedrico. Da osservazioni fatte al microscopio alcuni biologi hanno ipotizzato che le facce siano tutte esagonali. Di certo non sono esagoni regolari perché è noto che non esiste un solido ricoperto da esagoni regolari. Dimostrare che l'ipotesi dei biologi è falsa: non può esistere un poliedro convesso la cui superficie sia ricoperta da soli esagoni (regolari o non regolari).

Problema 3. Buckminster Fuller è stato un designer, scienziato, architetto, insomma quello che si dice un pensatore poliedrico e effettivamente si è occupato di poliedri. In occasione di Expo 1967, a Montreal, Buckminster Fuller ha realizzato il padiglione USA, una struttura in acciaio, a forma di bolla, vuota all'interno, con facce esagonali. Si dimostri che non è possibile realizzare un poliedro convesso con facce tutte esagonali.

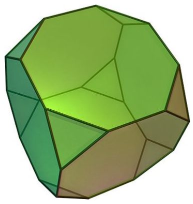


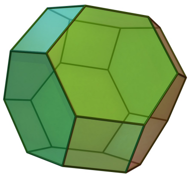
Photograph courtesy of ARGO Construction, Inc., Montreal, Quebec, Canada.

Problema 4. Una delle osservazioni di Eulero è che non esistono poliedri convessi con 7 spigoli. Dimostratelo.

Problema 5. Dimostrare che se in un poliedro convesso nessuno dei vertici ha valenza 3, cioè ha 3 spigoli uscenti, allora esiste almeno una faccia a forma di triangolo.

Problema 6. Il *cubo* troncato è un poliedro convesso le cui facce sono ottagoni oppure triangoli. In ogni vertice si incontrano un triangolo e due ottagoni. Quanti sono i vertici, gli spigoli, le facce triangolari e le facce ottagonali?





Problema 7. Nell'*ottaedro troncato* le facce sono esagoni oppure quadrati. Quanti sono i vertici, gli spigoli, le facce quadrate e le facce esagonali?