

1. Fenomeni aleatori

La nozione di probabilità è un'invenzione di origine moderna che si può datare tra il '500 e il '600, ed è legata allo sviluppo della scienza moderna. Ernst Cassirer (*Storia della Filosofia Moderna*, Einaudi, 1958) identifica la svolta che è all'origine del moderno pensiero scientifico nel programma di Bacone e Galilei per ottenere *conoscenza*, basato sul convincimento che la conoscenza si ottiene attraverso l'interazione tra uomo e natura ossia con l'esperimento.

La novità forte del programma è che l'esperimento non è un'osservazione passiva dei fenomeni naturali, come vuole la tradizione della scienza aristotelica, ma un'interrogazione della natura, con l'obiettivo di scoprire relazioni tra i fenomeni (*leggi di natura*). Secondo Galilei queste relazioni si possono scrivere nel linguaggio matematico. Gli esperimenti di Galilei e i principi della dinamica di Newton forniranno il paradigma per tutta la scienza moderna, comprese le scienze sociali.

Determinismo e non-determinismo. A differenza della dinamica newtoniana, dove la relazione tra i fenomeni è sempre la stessa, ad un certo fenomeno ne segue sempre un altro (determinismo), nei casi studiati dalle scienze sociali le leggi raramente si possono ridurre a relazioni di causa ed effetto e sono *variabili*. Questi fenomeni sono attualmente noti come *fenomeni aleatori* e possono essere affrontati con gli strumenti di indagine forniti dal calcolo delle probabilità.

La probabilità fu la nozione con cui i primi studiosi come Pascal, Huygens, Bernoulli, Bayes, Laplace, Gauss cercarono di *ridurre* la *variabilità dei fenomeni* a *regolarità* esprimibili in forma matematica. Studiando come si distribuivano i risultati di un gioco d'azzardo oppure la durata della vita degli esseri umani, si scoprirono leggi rappresentabili con formule matematiche. Gli sviluppi della teoria della probabilità hanno consentito applicazioni al mondo dell'economia (sviluppo delle assicurazioni sulla vita) e alle scienze sociali. Nel '900 la probabilità è diventata un'ingrediente essenziale delle teorie fisiche fondamentali come la meccanica statistica e la meccanica quantistica, producendo una rivoluzione concettuale nella visione scientifica del mondo, il passaggio dalla visione deterministica a quella non-deterministica.



La teoria della probabilità ha permesso di risolvere problemi che assillavano le prime imprese di assicurazione, quello di determinare il valore equo per un premio di assicurazione sulla vita. Un successo più recente del calcolo delle probabilità è stato quello di riuscire a determinare il prezzo di vendita dei derivati, particolari scommesse scambiate come prodotti finanziari.

2. Spazio dei campioni di un esperimento ed eventi

Consideriamo il fenomeno del lancio di una moneta. Per poter parlare di probabilità attorno a questo fenomeno facciamo delle ipotesi: non ci interessa sapere quello che succede durante il movimento in aria della moneta, l'unico dato rilevante è la faccia superiore che appare quando la moneta si arresta, alla fine del moto. Questa semplificazione ha il vantaggio di poter **definire l'esperimento come una domanda precisa**: tra le due possibili facce quale si realizzerà? Le *possibili risposte* alla domanda sono i **risultati possibili** dell'esperimento.

L'*esperimento probabilistico* è una semplificazione ideale, un modello di un fenomeno reale o di un esperimento concreto.

Esempio 1. Supponiamo di lanciare una moneta per 3 volte e di raccontare quello che è successo ad ogni lancio, distinguendo se è uscito *testa* oppure *croce*:

1	2	3
C	T	C

Questo è un esempio di **esperimento probabilistico** e la sequenza di C e T che abbiamo scritto è il **risultato osservato** dell'esperimento.

Le liste ordinate di 3 simboli C oppure T, come CTC che è il risultato osservato dopo che abbiamo fatto l'esperimento, ma anche TTC, TTT, ... sono i **risultati possibili** dell'esperimento. Uno solo tra i *risultati possibili* è il *risultato osservato quando* l'esperimento viene eseguito.

L'insieme di tutti i risultati possibili di un esperimento si chiama lo **spazio dei campioni** dell'esperimento.

Nel nostro esperimento del lancio di una moneta per 3 volte, lo spazio dei campioni Ω è un insieme con $2^3 = 8$ elementi.

$$\Omega = \{CCC, CCT, CTC, CTT, TCC, TCT, TTC, TTT\}$$

Esercizio 1. Qual può essere lo spazio dei campioni di un esperimento che consiste nel lanciare contemporaneamente 3 monete?



Possiamo fare delle **asserzioni sull'esperimento** del lancio di una moneta per 3 volte. Ad esempio, dire che abbiamo ottenuto una croce nel 3° lancio. Un'informazione come questa è quello che si chiama un **evento**.

Di un evento possiamo farne un *oggetto matematico* identificandolo con l'**insieme** di tutti i modi in cui esso può accadere (realizzarsi).

Ad esempio, l'evento E il 3° **lancio è croce** è l'insieme di tutti i risultati dell'esperimento in cui accade che al 3° lancio si realizza una croce, cioè possiamo dire che

L'evento E è il sottoinsieme $\{TTC, TCC, CTC, CCC\}$ dello spazio dei campioni.

Esercizio 2. Nell'esperimento che consiste nel lanciare 3 volte una stessa moneta dire quali sono i sottoinsiemi dello spazio dei campioni Ω che rappresentano gli eventi seguenti:

(2.1) Esce una sola volta testa

(2.2) Esce almeno due volte croce

(2.3) Non esce mai la stessa faccia per 2 volte consecutive.

3. Modelli diversi dello stesso esperimento

La scelta dello spazio dei campioni di un esperimento dipende dagli **eventi** dei quali vogliamo valutare la probabilità.

Esempio 2. Vengono estratte due carte da un mazzo di 52 carte. Supponiamo che le due carte siano estratte in ordine, per cui si possano osservare la *prima carta* e la *seconda carta*. Gli **eventi** che ci interessano siano:

A = nessuna delle due carte è un cuore,

B = entrambe le carte sono cuori

C = almeno una carta è un cuore

D = la prima carta non è un cuore

Tenendo conto degli eventi che sono oggetto della nostra attenzione, **sono possibili diversi modelli** per descrivere l'esperimento, cioè diversi spazi dei campioni.

Vediamo due diversi spazi dei campioni per il nostro esperimento.

1°) Supponiamo che i risultati di una singola estrazione siano i quattro semi delle carte ♣, ♦, ♠, ♥. Allora, l'esperimento che consiste nell'estrarre due carte in ordine ha come spazio dei campioni l'insieme di 16 elementi:

$\{\clubsuit\clubsuit, \clubsuit\diamondsuit, \clubsuit\spadesuit, \clubsuit\heartsuit, \diamondsuit\clubsuit, \diamondsuit\diamondsuit, \diamondsuit\spadesuit, \diamondsuit\heartsuit, \spadesuit\clubsuit, \spadesuit\diamondsuit, \spadesuit\spadesuit, \spadesuit\heartsuit, \heartsuit\clubsuit, \heartsuit\diamondsuit, \heartsuit\spadesuit, \heartsuit\heartsuit\}$

ad esempio, ♦♣ è il punto dello spazio dei campioni che rappresenta il risultato:

la prima carta estratta è quadri e la seconda carta estratta è fiori

Si può scegliere uno spazio dei campioni più semplice osservando che gli eventi che ci interessano *A, B, C, D* non distinguono i semi fiori, picche o quadri:

2°) assumiamo che i risultati di una singola estrazione siano ♥ e ⊥ (con questo simbolo indichiamo un seme diverso da ♥). Allora, l'esperimento ha come spazio dei campioni l'insieme di 4 elementi:

$\{\perp\perp, \perp\heartsuit, \heartsuit\perp, \heartsuit\heartsuit\}$

Entrambi gli spazi dei campioni sono corretti come modelli dell'esperimento, ma il secondo si fa preferire per la sua semplicità. E' più facile fare dei ragionamenti in questo modello e calcolare le probabilità degli eventi *A, B, C, D* che nei due modelli sono:

- 1°) $A = \{\clubsuit\clubsuit, \clubsuit\diamondsuit, \clubsuit\spadesuit, \diamondsuit\clubsuit, \diamondsuit\diamondsuit, \diamondsuit\spadesuit, \spadesuit\clubsuit, \spadesuit\diamondsuit, \spadesuit\spadesuit\}$
 $B = \{\heartsuit\heartsuit\}$
 $C = \{\clubsuit\heartsuit, \diamondsuit\heartsuit, \spadesuit\heartsuit, \heartsuit\clubsuit, \heartsuit\diamondsuit, \heartsuit\spadesuit, \heartsuit\heartsuit\}$
 $D = \{\clubsuit\clubsuit, \clubsuit\diamondsuit, \clubsuit\spadesuit, \clubsuit\heartsuit, \diamondsuit\clubsuit, \diamondsuit\diamondsuit, \diamondsuit\spadesuit, \diamondsuit\heartsuit, \spadesuit\clubsuit, \spadesuit\diamondsuit, \spadesuit\spadesuit, \spadesuit\heartsuit\}$
- 2°) $A = \{\perp\perp\}$
 $B = \{\heartsuit\heartsuit\}$
 $C = \{\perp\heartsuit, \heartsuit\perp, \heartsuit\heartsuit\}$
 $D = \{\perp\perp, \perp\heartsuit\}$

Esercizio 3. Da un mazzo di 52 carte vengono estratte in ordine due carte. Se siamo interessati agli eventi:

A = una carta è fiori e l'altra è cuori,

B = nessuna delle due carte è cuori,

C = almeno una carta è fiori

come possiamo definire uno spazio dei campioni per l'esperimento?

4. Modelli di esperimenti con prove ripetute

Riassumendo, un evento si può rappresentare, una volta scelto uno spazio dei campioni Ω dell'esperimento, come un sottoinsieme di Ω . E' l'insieme dei risultati dell'esperimento nei quali l'evento è vero (si realizza). E' bene distinguere l'evento dalla sua particolare rappresentazione che dipende dalla scelta dello spazio dei campioni. Tale scelta dipende dal tipo di informazioni cui siamo interessati, ma come vedremo, la probabilità dell'evento non dipenderà dalla scelta fatta.

Implicita nella definizione dello spazio dei campioni di un esperimento è l'ipotesi che i risultati siano tra loro distinguibili.

Esempio 3. *Lancio di un dado.* Per descrivere il lancio di un dado possiamo prendere come spazio dei campioni l'insieme

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

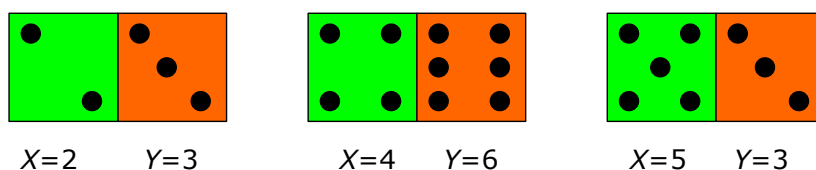
Possiamo descrivere tutti gli eventi osservabili nel lancio di un dado, come ad esempio:

$$\text{esce un numero pari} = \{2, 4, 6\}$$

$$\text{esce 2 oppure 5} = \{2, 5\}$$

$$\text{non esce 1} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

Esempio 4. *Lancio di due dadi.* Per descrivere il lancio di due dadi possiamo partire dallo spazio dei campioni $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ del lancio di un dado. Se indichiamo con X il risultato uscito nel primo dado e Y quello uscito nel secondo dado, allora tre risultati possibili del lancio di due dadi sono:



Lo spazio dei campioni di ciascuno dei due lanci è $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, mentre lo spazio dell'esperimento del lancio di due dadi è il *prodotto cartesiano* $U \times U$

Il prodotto cartesiano si disegna spesso con una tabella:

Notiamo che la prima riga della tabella è l'evento: *è uscito 1 al primo lancio.*

Esercizio 4. Nella tabella del lancio di due dadi, individuare gli eventi:

(4.1) *è uscito 2 al secondo lancio;*

(4.2) *sono usciti due numeri uguali, cioè $X = Y$.*