Il regalo di compleanno

Mario Puppi

30 gennaio 2017

Vediamo il problema tratto dalla gara OliMaTo, del 30 gennaio 2017.

Problema. Gioia era indecisa tra due regali per il compleanno di Paura, così li ha comprati entrambi. Ha poi pensato a un gioco aleatorio che Paura eseguirà per scegliere il proprio regalo. Gioia ha messo in una scatola 2017 caramelle, numerate da 1 a 2017. Paura estrae a caso una caramella, ne annota il numero, detto il *numero aureo*, e la rimette nella scatola. Inizia ora una sequenza di estrazioni, ad ognuna delle quali una caramella viene pescata e poi rimessa nella scatola. La sequenza terminerà quando Paura avrà pescato una caramella che abbia il numero aureo oppure un numero che differisca di 1 dal numero aureo. Se il numero della caramella finale è quello aureo allora Paura riceverà il primo regalo altrimenti avrà il secondo regalo. Qual è la probabilità che Paura riceva il primo regalo?

Sia n il *numero aureo*. Se $p = \frac{1}{2017}$, abbiamo la seguente distribuzione di probabilità sul numero aleatorio n:

$$\begin{tikzcd} & n \in \{1, \dots, 2017\} \arrow[dl, "p"'] \arrow[d, "2015p"] \arrow[dr, "p"] & \\ n = 1 & 2 \leq n \leq 2016 & n = 2017 \end{tikzcd}$$

Distingueremo due casi per n: il primo caso è $2 \leq n \leq 2016$, il secondo caso è quello complementare, $n = 1$ oppure $n = 2017$. Sia R il numero aleatorio che indica il regalo scelto, R può assumere il valore 1 oppure 2. Se si verifica l'evento $n = 1$ oppure $n = 2017$ allora la distribuzione di probabilità degli eventi $R = 1$, $R = 2$ è data dall'albero infinito:

$$\begin{tikzcd}
& n \in \{1, 2017\} \arrow[dl, "p"'] \arrow[d, "p"] \arrow[dr, "1-2p"] & & \\
R = 1 & R = 2 & \mathit{altrimenti} \arrow[dl, "p"'] \arrow[d, "p"] \arrow[dr, "1-2p"] & \\
& R = 1 & R = 2 & \ldots
\end{tikzcd}$$

Possiamo calcolare la probabilità dell'evento $R = 1$ condizionata dall'ipotesi che si realizzi l'evento $n \in \{1, 2017\}$:

$$p + (1 - 2p)p + (1 - 2p)^2 p + \ldots \;=\; p(1 + k + k^2 + \ldots)$$

dove abbiamo posto $k = 1 - 2p$. La probabilità dell'evento $R = 1$ dato che si verifica $n \in \{1, 2017\}$ è:

$$p(1 + k + k^2 + \ldots) = p\frac{1}{1 - k} = p\frac{1}{2p} = \frac{1}{2}$$

Vediamo poi l'albero della distribuzione di probabilità del numero casuale R nell'ipotesi che si realizzi l'evento $2 \leq n \leq 2016$:

$$\begin{tikzcd}
& 2 \leq n \leq 2016 \arrow[dl, "p"'] \arrow[d, "2p"] \arrow[dr, "1-3p"] & & \\
R = 1 & R = 2 & \mathit{altrimenti} \arrow[dl, "p"'] \arrow[d, "2p"] \arrow[dr, "1-3p"] & \\
& R = 1 & R = 2 & \ldots
\end{tikzcd}$$

Possiamo calcolare la probabilità dell'evento $R = 1$ condizionata dall'ipotesi che si realizzi l'evento $2 \leq n \leq 2016$:

$$p + (1 - 3p)p + (1 - 3p)^2 p + \ldots \;=\; p(1 + k + k^2 + \ldots)$$

dove abbiamo posto $k = 1 - 3p$. La probabilità dell'evento $R = 1$ dato che si verifica $2 \leq n \leq 2016$ è:

$$p(1 + k + k^2 + \ldots) = p\frac{1}{1 - k} = p\frac{1}{3p} = \frac{1}{3}$$

La probabilità totale dell'evento $R = 1$ è data da:

$$\frac{1}{2}(2p) + \frac{1}{3}(2015p) = = \frac{2018}{3}p = \frac{2018}{6051}$$