

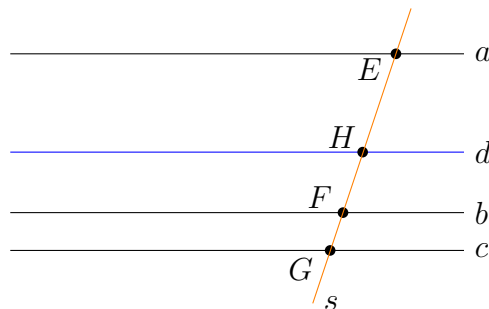
Similitudini tra rette

Mario Puppi

14 gennaio 2017

1 Corrispondenze di Talete

Raggi di luce, schermo e immagini. Consideriamo una retta s e una retta d , non parallele tra loro. Allora ogni retta x parallela alla retta d incontra la retta s in un punto $x \cap s$. Immaginiamo che le rette parallele alla retta d siano dei *raggi di luce* che proiettano su uno schermo s dei *punti immagine*. In particolare, uno dei raggi è proprio la retta d .

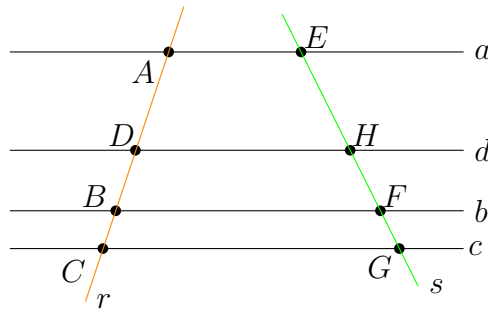


Possiamo pensare che ogni raggio abbia un nome, così in figura possiamo distinguere altri tre raggi a, b, c . Ciascuno di essi proietta un punto immagine sullo schermo s :

- $a \mapsto E = a \cap s$
- $b \mapsto F = b \cap s$
- $c \mapsto G = c \cap s$
- $d \mapsto H = d \cap s$

Ogni raggio di luce x è parallelo alla retta data d e proietta sullo schermo un'immagine definita come l'intersezione con lo schermo: $x \cap s$.

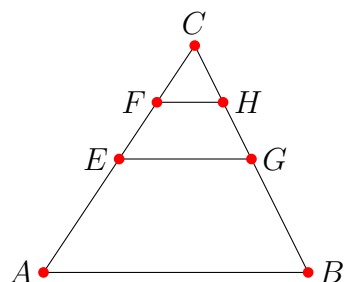
Corrispondenze di Talete. Riassunto della prima puntata: dei raggi di luce, che hanno la direzione di una retta data d , incontrano lo schermo s dove si formano dei punti che abbiamo chiamato “immagini”. Entra in scena ora un'altra retta r . Supponiamo che anche r non sia parallela alla retta d , proprio come s . In questo modo, siamo sicuri che i raggi di luce formano dei punti su r proprio come accade con lo schermo s . I raggi di luce stabiliscono una relazione tra i punti di r e i punti di s , che possiamo vedere in figura.



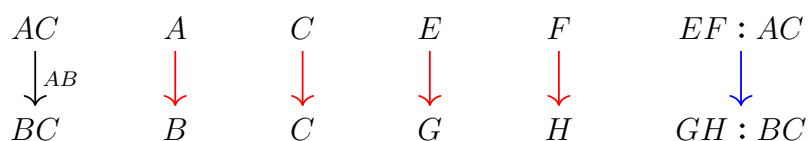
- $A \mapsto E = a \cap s$
- $B \mapsto F = b \cap s$
- $C \mapsto G = c \cap s$
- $D \mapsto H = d \cap s$

In generale, la relazione è definita così: al punto X della retta r corrisponde il punto Y dello schermo s che è immagine del raggio di luce passante per X . La relazione ha come dominio l'insieme dei punti della retta r e come codominio l'insieme dei punti della retta s . E' una funzione, perchè ogni punto del dominio è in relazione con un unico punto del codominio (la sua immagine). La chiameremo *corrispondenza di Talete*, come usano fare i francesi, oppure anche *corrispondenza parallela* come usano alcuni libri di testo italiani.

Problema 1. Dai punti E, F del lato AC di un triangolo ABC sono condotte le rette parallele al lato AB che intersecano il lato BC rispettivamente nei punti G, H . Dimostrare che $EF : AC = GH : BC$.



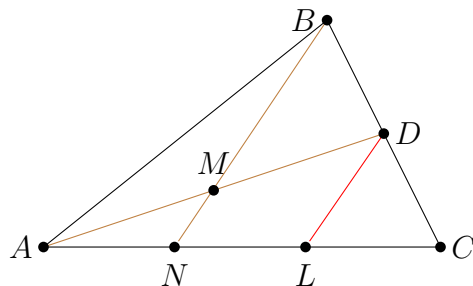
Una corrispondenza di Talete che risolve il problema ha direzione AB , dominio AC e codominio BC :



Il senso della dimostrazione è che, nella corrispondenza definita, il rapporto $EF : AC$, una proprietà geometrica della figura $\{A, C, E, F\}$, è uguale al rapporto tra le immagini, cioè tra i punti corrispondenti nella figura $\{B, C, G, H\}$.

Invarianza del rapporto o della forma. Per quale motivo gli studenti dovrebbero studiare le corrispondenze di Talete? Diciamo che si tratta di una conoscenza che è alla base di molti ragionamenti geometrico-algebrici, tramite la quale emerge la profonda relazione esistente tra geometria e algebra, ossia tra forma e numero. La corrispondenza di Talete fornisce un metodo per decidere quando due figure, cioè due insiemi di punti, ciascuno su una retta, hanno la stessa forma. Si tratta di uno strumento usato per quantificare le forme geometriche, ossia per tradurre problemi di natura geometrica in questioni aritmetiche.

Problema 2. In un triangolo ABC sia M il punto medio della mediana AD . Dimostrare che se N è l'intersezione della retta MB con il lato AC allora AN è la metà di NC .



Per dimostrare che AN è la metà di NC divideremo a metà NC con un punto L . L'unico modo per costruire un nuovo punto è con una corrispondenza parallela e la figura ci fa intuire che L sarà il punto immagine del raggio passante per D , con direzione BM . La tesi è ora divisa in due parti: dimostreremo che $AN \cong NL$ e che $NL \cong LC$.

1) La congruenza $AM \cong MD$ (per ipotesi M è punto medio di AD) viene trasformata dalla corrispondenza parallela con dominio AD , codominio AC e direzione BM nella congruenza $AN \cong NL$:

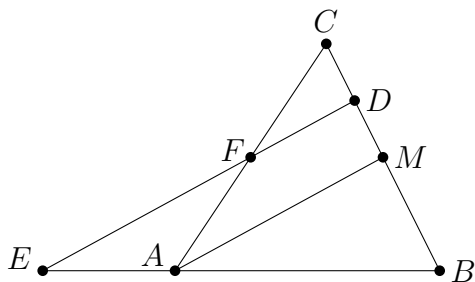
$$\begin{array}{ccccc}
 AD & A & M & D & AM \cong MD \\
 \downarrow_{BM} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 AC & A & N & L & AN \cong NL
 \end{array}$$

2) La congruenza $BD \cong DC$ viene trasformata dalla corrispondenza parallela che ha dominio BC , codominio AC e direzione BM nella congruenza $NL \cong LC$.

$$\begin{array}{ccccc}
 BC & B & D & C & BD \cong DC \\
 \downarrow_{BM} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 AC & N & L & C & NL \cong LC
 \end{array}$$

Problema 3. Da un punto O escono tre semirette OP, OQ, OR sulle quali sono dati rispettivamente i punti A, B, C tali che AB sia parallela a PQ , BC sia parallela a QR , CA sia parallela a RP . Dimostrare che $OA : AP = OB : BQ = OC : CR$.

Problema 4. Da un punto D del lato BC di un triangolo ABC conduci la parallela alla mediana AM che interseca la retta AB in un punto E e la retta AC in un punto F . Dimostra che $AB : AE = AC : AF$.



Partiamo dal rapporto $AB : AE$ e vediamo come lo trasforma la corrispondenza di Talete con direzione AM , da AB su BC :

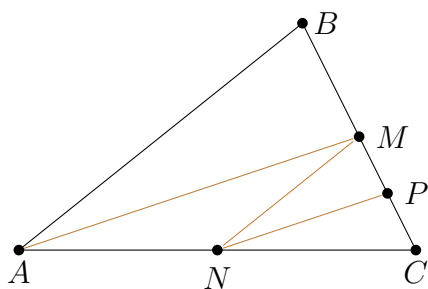
$$\begin{array}{ccccc}
 AB & A & E & B & AB : AE \\
 \downarrow_{AM} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 BC & M & D & B & MB : MD
 \end{array}$$

A questo punto, ci siamo ridotti a dimostrare che $MB : MD = AC : AF$. Sembra non sia possibile con una corrispondenza di Talete perchè le due figure $\{B, M, D\}$ e $\{A, F, C\}$ non sono in corrispondenza parallela. Come fare? Ricordiamoci che non abbiamo ancora usato l'ipotesi: il segmento MB è congruente a MC . Possiamo fare uno scambio di segmenti (MC al posto di MB) e dimostrare invece che $MC : MD = AC : AF$.

Adesso c'è una corrispondenza di Talete:

$$\begin{array}{ccccc}
 BC & M & D & C & MC : MD \\
 \downarrow_{AM} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 AC & A & F & C & AC : AF
 \end{array}$$

Problema 5. Dal punto medio M del lato BC del triangolo ABC traccia la parallela al lato AB che interseca il lato AC in N . Da N traccia la parallela a AM che interseca BC in P . Dimostra che BP è il triplo di PC .



Seguiamo la costruzione partendo dall'ipotesi: $BM \cong MC$.

1) Vogliamo trasformare $BM \cong MC$ per cui il dominio della prima corrispondenza parallela sarà la retta BC , la direzione sarà AB e lo schermo (codominio) la retta AC :

$$\begin{array}{ccccc}
BC & B & M & C & BM \cong MC \\
\downarrow_{AB} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
AC & A & N & C & AN \cong NC
\end{array}$$

2) Ora trasformiamo la congruenza appena ottenuta $AN \cong NC$. La nuova corrispondenza parallela avrà dominio AC e codominio la retta BC , mentre la direzione sarà data dalla retta AM :

$$\begin{array}{ccccc}
AC & A & N & C & AN \cong NC \\
\downarrow_{AM} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
BC & M & P & C & MP \cong PC
\end{array}$$

Per concludere che BP è il triplo di PC (la nostra tesi) useremo la congruenza $MP \cong PC$ appena trovata e l'ipotesi $BM \cong MC$:

$$BP \cong BM + MP \cong MC + MP \cong MP + PC + MP \cong MP + MP + MP$$

Problema 6. Nel triangolo ABC da punto E sul lato BC si conduce la parallela ad AB che interseca AC in F e la parallela ad AC che interseca AB in G . La retta GF interseca il prolungamento del lato BC in H . Dimostrare che $HB : HE = HE : HC$.

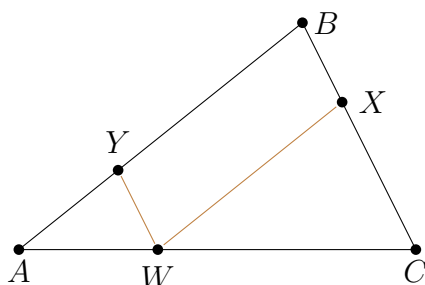
Problema 7. Nel triangolo ABC da punto E sul lato AB si conduce la parallela a BC che interseca AC in F . Da F la parallela FG al lato AB con G punto su BC , da G la parallela GE' ad AC , con E' su AB , da E' la parallela $E'F'$ a BC con F' su AC , da F' la parallela $F'G'$ ad AB con G' su BC e da G' la parallela $G'E''$ ad AC con E'' su AB . Usare la proprietà che se X, Y sono due punti su AB tali che $AX : XB = AY : YB$ allora $X = Y$ per dimostrare che $E'' = E$.

2 Una corrispondenza che conserva i rapporti non è detto che sia corrispondenza parallela

Abbiamo visto che le corrispondenze di Talete conservano i rapporti tra segmenti. Possiamo chiederci se una corrispondenza che conserva i rapporti sia una corrispondenza di Talete. La risposta è no, non sempre, come possiamo vedere risolvendo il seguente:

Problema 8. Fissato un triangolo ABC , consideriamo la costruzione geometrica seguente. Da punto variabile X sul lato BC si conduce la parallela ad AB che interseca AC in W e da W si traccia poi la parallela a BC che interseca AB in Y .

- 1) Dimostrare che la corrispondenza $X \mapsto Y$ che ad ogni punto $X \in BC$ associa il risultato della costruzione $Y \in AB$ conserva i rapporti.
- 2) Verificare che la corrispondenza data non è una corrispondenza di Talete.



1) Vediamo che il rapporto $BX : BC$, tra i punti B, X, C , è uguale al rapporto tra i punti corrispondenti A, Y, B :

BC	B	X	C	$BX : BC$
\downarrow_{AB}	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow
AC	A	W	C	$BX : BC$
\downarrow_{BC}	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow
AB	A	Y	B	$AY : AB$

2) Il corrispondente di B è A , in simboli si scrive $B \rightarrow A$, e così scriviamo $X \rightarrow Y$, come pure $C \rightarrow B$. Le rette che collegano un punto con il corrispondente sono BA, XY, CB , e certamente non sono parallele. Dunque, la corrispondenza non è di Talete, anche se conserva i rapporti delle figure.

A questo punto è naturale chiedersi quando una corrispondenza che conserva i rapporti sia una corrispondenza di Talete. La risposta è molto semplice, se comprendiamo prima una nozione generale sulle corrispondenze. Ogni corrispondenza ha un dominio e un codominio. Noi stiamo parlando di corrispondenze che hanno come dominio una retta e codominio un'altra retta. Nel problema precedente la protagonista era una corrispondenza dalla retta BC (il dominio) alla retta AB (il codominio). Avremmo potuto capire subito che non era una corrispondenza di Talete, senza connettere tutti i corrispondenti

come abbiamo fatto. Bastava fare una piccola verifica su un punto speciale che è l'intersezione tra il dominio e il codominio, vale a dire il punto B . in una corrispondenza di Talete tra la retta BC e la retta AB il corrispondente di B è sempre B stesso, non importa quale sia la direzione. Nella corrispondenza in esame, invece, B ha come corrispondente il punto A . Questo basta per concludere che non può essere una corrispondenza parallela. Infatti, vale la proprietà seguente:

Proprietà del punto fisso. Se in una corrispondenza di Talete il dominio e il codominio sono rette incidenti (cioè, non parallele) allora il loro punto di intersezione ha come corrispondente se stesso.

Definizione di punto fisso. Si chiama '*punto fisso*' di una corrispondenza tra due rette un punto che ha come immagine se stesso.