Dai decimali periodici alle frazioni.

Mario Puppi

7 febbraio 2017

1 Una regola difficile da accettare.

L'obiettivo di questa sezione di esercizi è duplice. Da una parte, quella più importante, vogliamo imparare la tecnica di rappresentare i problemi con dei diagrammi. Dall'altra vogliamo affinare la nostra conoscenza delle frazioni, che sono una delle rappresentazioni dei numeri razionali. Non c'è niente di meglio che fare esercizio su degli oggetti come i numeri decimali periodici, che sono una rappresentazione alternativa dei numeri razionali. Il problema è trasformare un numero decimale periodico in frazione, ma senza usare la nota formula della scuola media. Partiamo dalla conoscenza fondamentale:

Assioma dei numeri periodici. Il numero periodico $0,\bar{9} = 0,999\ldots$ è uguale a 1.

Assumeremo questa asserzione come un'assioma, vale a dire una verità che per i matematici è come un dogma, non dimostrabile con l'uso della sola ragione. Per noi sarà un riferimento fondamentale, l'unica formula da imparare a memoria. Tuttavia, possiamo almeno tentarne una spiegazione, usando una proprietà che conosciamo bene.

Un fatto noto. Moltiplicare per 10 un numero decimale finito ha l'effetto di spostare la virgola di un posto verso destra. Ad esempio, $10 \times 2,345 = 23,45$, ed anche $10 \times 0,333 = 3,33$.

Facciamo ora un'azione audace, un pò pazza, al di fuori del modo di ragionare che i matematici ammettono come legale. Applichiamo la regola del moltiplicare per 10 al numero decimale infinito $0,999\ldots$. Scriviamo così:

$$0,\bar{9} \times 10 = 0,999\cdots \times 10 = 9,999\cdots = 9,\bar{9}$$

Pensiamo a $0,\bar{9}$ e $9,\bar{9}$ come delle quantità che vogliamo misurare. Usiamo la legge della relazione inversa e introduciamo una terza quantità 9 in modo da poter fare il diagramma della somma:

$$\begin{tikzcd} & 9,999\ldots \arrow[dl, "1/10"'] \arrow[dr] & \\ 0,999\ldots & & 9 \end{tikzcd}$$

con la legge del complementare troviamo la relazione tra $9,999\ldots$ e 9:

$$\begin{tikzcd} & 9,999\ldots \arrow[dl, "1/10"'] \arrow[dr, "9/10"] & \\ 0,999\ldots & & 9 \end{tikzcd}$$

Ora, abbiamo quello che ci serve per trovare la relazione tra 9 e $0,999\ldots$: basta invertire la freccia $9/10$:

$$\begin{tikzcd} & 9,999\ldots \arrow[dl, "1/10"'] & \\ 0,999\ldots & & 9 \arrow[ul, "10/9"] \end{tikzcd}$$

Riassumendo, abbiamo trovato che $0,999\ldots$ è $\frac{1}{10}$ di $\frac{10}{9}$ di 9, cioè

$$0,999\cdots = \frac{1}{10} \times \frac{10}{9} \times 9 = 1$$

Se accettiamo che la moltiplicazione per 10 sposta la virgola nei numeri decimali periodici come nei decimali finiti, allora possiamo accettare anche l'assioma che dice che $0,999\cdots = 1$.

2 Dai decimali periodici alle frazioni

Applichiamo il metodo dei diagrammi alla trasformazione di un numero decimale periodico in frazione. Possiamo quantificare la complessità del problema contando il numero di operazioni impiegate in una sua soluzione. Cominciamo dai problemi che richiedono il numero minimo di operazioni, come quello che segue. Come vedremo, il problema 1 avrà un ruolo importante nel seguito di questa storia.

Problema 1. Trasformare in frazione $0,\bar{1} = 0,111\ldots$.

La moltiplicazione per 9 trasforma $0,\bar{1} = 0,111\ldots$ in $0,999\ldots$:

$$0,\bar{1} \xrightarrow{9} 0,\bar{9}$$

Ci ricordiamo che $0,\bar{9} = 0,999\cdots = 1$ e usiamo la regola della relazione inversa per ricavare:

$$0,\bar{1} \xleftarrow[1/9]{} 1$$

Infine, calcoliamo il diagramma: $0,\bar{1} = 1 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$

Vediamo ora un esercizio che richiede due operazioni:

Problema 2. Trasformare in frazione $0,\bar{2}$.

L'idea è ridursi al problema 1, cioè di collegare $0,\bar{2} = 0,222\ldots$ a $0,\bar{1} = 0,111\ldots$. Un collegamento è dato dalla moltiplicazione per 2:

$$0,\bar{2} \xleftarrow[2]{} 0,\bar{1} \xleftarrow[1/9]{} 1$$

Il calcolo del diagramma ci dà $0,\bar{2} = 1 \times \frac{1}{9} \times 2 = \frac{2}{9}$

Siamo cresciuti abbastanza per l'esercizio da tre operazioni:

Problema 3. Trasformare in frazione $1,\bar{4}$.

L'idea è di collegare $1,\bar{4} = 1,444\ldots$ a $0,\bar{4} = 0,444\ldots$ con una sottrazione:

$$1,444\ldots \xrightarrow{-1} 0,444\ldots \xleftarrow[4]{} 0,111\ldots \xleftarrow[1/9]{} 1$$

Usiamo la legge della relazione inversa: invertiamo la freccia -1 in modo che 1 sia collegato con $1,444\ldots$:

$$1,444\ldots \xleftarrow[+1]{} 0,444\ldots \xleftarrow[4]{} 0,111\ldots \xleftarrow[1/9]{} 1$$

La traduzione del diagramma ci dà $1,\bar{4} = 1 \times \frac{1}{9} \times 4 + 1 = 1 + \frac{4}{9}$

Problema 4. Trasformare in frazione $0,7\bar{5}$.

Ancora una volta adottiamo la strategia di ridursi ad un problema che sappiamo risolvere. L'idea è di eliminare l'antiperiodo riducendosi a $7,555\ldots$

$$0,7555\ldots \longrightarrow 7,555\ldots \longrightarrow 0,555\ldots \xleftarrow[5]{} 0,111\ldots \xleftarrow[1/9]{} 1$$

Il diagramma da risolvere è

$$0,7555\ldots \xrightarrow{10} 7,555\ldots \xrightarrow{-7} 0,555\ldots \xleftarrow[5]{} 0,111\ldots \xleftarrow[1/9]{} 1$$

Il diagramma risolto (invertendo due frecce) è

$$0,7555\ldots \xleftarrow[1/10]{} 7,555\ldots \xleftarrow[+7]{} 0,555\ldots \xleftarrow[5]{} 0,111\ldots \xleftarrow[1/9]{} 1$$

che ci dà l'espressione *razionale* del numero $0,7\bar{5}\ldots$ (attenzione all'uso delle parentesi!):

$$0,7\bar{5}\cdots = (1 \times \frac{1}{9} \times 5 + 7) \times \frac{1}{10} = (\frac{5}{9} + 7) \times \frac{1}{10} = \frac{5}{90} + \frac{7}{10}$$