Colorazioni del piano razionale

Carlo Andreatta, Mario Puppi

17 febbraio 2017

1 Il teorema di Woodall

Per una coppia di punti (A, B) del piano indichiamo con AB la distanza tra i due punti. In coordinate cartesiane, se $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)$ allora

$$AB^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$$

Definizione 1. Consideriamo la relazione U nel piano razionale $\mathbf{Q}^2$ definita da

$$U = \{(A, B) \in \mathbf{Q}^2 : AB = 1\}$$

Possiamo immaginare la relazione U come un grafo disegnato nel piano cartesiano. Una colorazione del grafo consiste nel dare un colore a ciascun punto del piano in modo che due punti in relazione tra loro abbiano colori distinti.

Problema 0. Qual è il numero minimo di colori per colorare i punti del piano razionale $\mathbf{Q}^2$ in modo che due punti a distanza 1 abbiano colori distinti?

Tale numero si chiama *numero cromatico* dell'insieme $\mathbf{Q}^2$ ed è stato determinato da D. R. Woodall:

Teorema (Woodall, 1971). Il numero cromatico del piano $\mathbf{Q}^2$ è 2.

Nella sua dimostrazione Woodall fa uso di una relazione di equivalenza sull'insieme $\mathbf{Q}^2$ delle coppie di numeri razionali:

Definizione 2. Due punti A, B del piano razionale $\mathbf{Q}^2$ sono in relazione tra loro se $x_B - x_A$ e $y_B - y_A$ hanno entrambi denominatore dispari (quando sono scritti in forma normale). Scriveremo allora

$$A \cong B$$

2 La parità dei numeri razionali.

Definizione 3.1 Una frazione di interi $\frac{n}{d}$ è una *forma normale*, se $d > 0$ e $MCD(n,d) = 1$ (assumiamo che il MCD sia un intero positivo).

Possiamo allora parlare di *numeratore* e *denominatore* di un numero razionale, poichè ogni numero razionale r ha un'unica forma normale.

Definizione 3.2 Il *numeratore* e il *denominatore* di un numero razionale r sono il numeratore n e il denominatore d dell'unica frazione $\frac{n}{d}$ equivalente a r tale che $MCD(n,d) = 1$ e $d > 0$.

Ad esempio, il numero razionale $\frac{2}{3}$ ha denominatore 3 e numeratore 2. Ogni numero intero n si può scrivere $n = \frac{n}{1}$, con $MCD(n,1) = 1$, quindi ha numeratore n e denominatore uguale a 1.

Definizione 3.3 La *parità* di un numero razionale r è una coppia ordinata (p,q) che indicheremo con $\frac{p}{q}$, dove $p, q \in \{pari, dispari\}$ sono tali che il numeratore di r abbia parità p e il denominatore di r abbia parità q.

Ad esempio, il numero razionale $\frac{4}{7}$ ha parità $\frac{pari}{dispari}$, come pure 4, mentre $\frac{5}{8}$ ha parità $\frac{dispari}{pari}$.

Problema 1. Quali sono i valori che può assumere la parità di un numero razionale?

La parità di un numero razionale può assumere tre valori soltanto: $\frac{dispari}{dispari}$, $\frac{pari}{dispari}$, $\frac{dispari}{pari}$. Rimane escluso $\frac{pari}{pari}$.

3 Parità dei vettori nel piano razionale

La parità sui numeri razionali determina una relazione di equivalenza sui vettori del piano razionale. Possiamo classificare i vettori del piano razionale in 9 tipi, osservando la parità delle loro coordinate. Ad esempio, il vettore $(\frac{2}{3}, \frac{5}{4})$ appartiene al tipo $(\frac{pari}{dispari}, \frac{dispari}{pari})$. Ci sono 9 classi di equivalenza.

Definizione 4. Un vettore u del piano razionale $\mathbf{Q}^2$ è unitario se ha lunghezza 1.

$$\mathbf{U} = \{u = (x_u, y_u) \in \mathbf{Q}^2 : x_u^2 + y_u^2 = 1\}$$

Quali di queste classi contengono vettori di lunghezza 1?

Problema 2 Quali sono i valori possibili della parità di un vettore $u = (x_u, y_u) \in \mathbf{U}$?

Un esame della parità sui vettori con coordinate che hanno denominatore inferiore a 100, ci fornisce una congettura sulla loro parità:

Proposizione 1 Se un vettore $u = (x_u, y_u) \in \mathbf{U}$ allora la sua parità è una dei due tipi: $(\frac{pari}{dispari}, \frac{dispari}{dispari})$ oppure $(\frac{dispari}{dispari}, \frac{pari}{dispari})$.

Esercizio 1. Se un punto $P = (x_P, y_P)$ del piano razionale è a distanza 1 dall'origine $O = (0, 0)$ allora le sue coordinate hanno entrambe lo stesso denominatore che è un intero positivo della forma $4n + 1$.

Ora, abbiamo un'idea da cui partire. Data la parità di un punto A, un punto B tale che il vettore AB abbia una parità che non è $(\frac{pari}{dispari}, \frac{dispari}{dispari})$ e neppure $(\frac{dispari}{dispari}, \frac{pari}{dispari})$, sarà a una distanza certamente diversa da 1 e potrà essere colorato con lo stesso colore di A.

Esercizio 2. Supponiamo che il piano razionale sia stato colorato con 2 colori. Siano S un insieme finito di vettori unitari, $M = \{m_u : u \in S\}$ un insieme di numeri interi e v il vettore combinazione lineare di S con i coefficienti dell'insieme M. Dimostrare che per ogni punto razionale A, il punto $B = A + v$ ha lo stesso colore di A se e solo se la somma di M è pari.

Proposizione. Supponiamo che il piano razionale sia stato colorato con 2 colori e siano B l'insieme dei punti blu, R l'insieme dei punti rossi. Supponiamo che u e v siano due vettori unitari.

4 La relazione di Woodall.

Ora siamo in possesso di nozioni utili per definire la relazione fondamentale usata da Woodall nella dimostrazione del suo teorema.

Definizione 5. Due punti $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)$ del piano razionale $\mathbf{Q}^2$ sono in relazione tra loro quando $B - A$ ha entrambe le coordinate con denominatore dispari. Scriveremo allora

$$A \cong B$$

Ad esempio, $(\frac{1}{9}, \frac{2}{7}) \cong (\frac{2}{5}, \frac{1}{3})$ perchè $\frac{2}{5} - \frac{1}{9} = \frac{13}{45}$ e $\frac{1}{3} - \frac{2}{7} = \frac{1}{21}$ hanno denominatore dispari.

Verifichiamo che $\cong$ è una relazione di equivalenza sull'insieme dei punti razionali del piano.

Proposizione 1. La relazione $\cong$ è riflessiva.

Infatti, preso un qualsiasi punto razionale $(x, y) \in \mathbf{Q}^2$, abbiamo che $x - x = 0, y - y = 0$ e il denominatore di 0 è 1, essendo $0 = \frac{0}{1}$, con $(0, 1) = 1$.

Per essere certi che la dimostrazione precedente sia davvero tale, dobbiamo essere un pò scrupolosi nel definire l'MCD di due numeri interi. Serve una definizione che si possa applicare facilmente al caso in cui uno dei due numeri interi sia 0. Non è difficile dare una definizione di MCD in cui $(0, n) = n$ per ogni numero intero n. Pensateci per conto vostro!

Proposizione 2. La relazione $\cong$ è simmetrica.

Proposizione 3. La relazione $\cong$ è transitiva.

Le proposizioni 1, 2, 3 messe assieme ci dicono che $\cong$ è una relazione di equivalenza sull'insieme $\mathbf{Q}^2$ dei punti razionali del piano. Prendiamo un pò di confidenza con essa. Indicheremo con $[A]$ la classe di equivalenza di un punto A.

Problema 4. Determinare la classe di equivalenza di (0, 0) per la relazione $\cong$.

Problema 5. Dimostrare che tutti i punti razionali (x, y) tali che x e y sono entrambi dispari sono equivalenti tra loro.

Problema 6. Determinare tutte le classi di equivalenza della relazione $\cong$.

5 Geometria dell'equivalenza.

Vediamo come la relazione $\cong$ è collegata con il problema 0 della colorazione del piano razionale.

Proposizione 4. Se due punti dell'insieme $\mathbf{Q}^2$ sono a distanza 1 tra loro allora essi sono equivalenti.

Questo risultato è un primo passo nella risoluzione del problema di determinare il numero cromatico del piano razionale. Le classi di equivalenza ci danno informazioni utili su come colorare il piano razionale con il minimo numero di colori. Per dirlo in forma negativa, se due punti si trovano in classi di equivalenza distinte allora non possono essere a distanza 1 tra loro, quindi possono avere lo stesso colore. La proposizione 4 ci dice che possiamo farlo senza violare la condizione della distanza unitaria.

Vediamo ora il secondo passo.

Proposizione 5. Due classi di equivalenza della relazione $\cong$ sono congruenti per traslazione.

Possiamo rendere precisa la proposizione 5:

Problema 7. Siano $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)$ punti razionali. Allora c'è una traslazione che trasforma la classe di equivalenza $[A]$ in $[B]$. Precisamente, esiste un punto razionale (r, s) tale che la traslazione

$$f : (x, y) \mapsto (x + r, y + s)$$

trasformi $[A]$ in $[B]$.

6 Conclusione.

Le due proposizioni 4 e 5 assieme hanno come conseguenza una riduzione drastica del problema di colorare il piano razionale:

Problema 8. Da una colorazione dell'insieme dei punti di una classe di equivalenza di $\cong$ si può dedurre una colorazione di tutti i punti del piano razionale $\mathbf{Q}^2$.

Siamo ora a buon punto. Ogni classe di equivalenza è una versione traslata di ogni altra classe di equivalenza. Possiamo definire una colorazione del piano razionale $\mathbf{Q}^2$ trovando una colorazione di una sola classe di equivalenza della relazione $\cong$ e traslando poi quella colorazione ad ogni altra classe di equivalenza.
Concentriamo dunque l'attenzione sulla colorazione della classe [(0,0)].

Problema 9. Trovare una colorazione per tutti i punti della classe [(0, 0)].
Sia rosso il colore di (0, 0). Un punto della classe [(0, 0)] che si trovi a distanza 1 da (0,0) sarà della forma $(\frac{dispari}{dispari}, \frac{pari}{dispari})$ oppure $(\frac{pari}{dispari}, \frac{dispari}{dispari})$. Pertanto, coloriamo il punto di blu se è di una di queste due parità. Altrimenti, se è della forma $(\frac{dispari}{dispari}, \frac{dispari}{dispari})$ oppure $(\frac{pari}{dispari}, \frac{pari}{dispari})$ lo coloriamo di rosso. In questo modo siamo sicuri che (0, 0) non sarà a distanza 1 da un punto dello stesso colore. Possiamo ora provare che

Proposizione. Se due punti $(\frac{m}{a}, \frac{n}{b})$ e $(\frac{p}{c}, \frac{q}{d})$ della classe [(0, 0)] si trovano a distanza 1 allora non hanno lo stesso colore.

Infatti, se hanno distanza 1 allora

$$(mc - ap)^2 b^2 d^2 + a^2 c^2 (nd - qb)^2 = b^2 d^2 a^2 c^2$$

Poichè i denominatori $a, b, , c, d$ sono dispari, $(mc - ap)^2 b^2 d^2$ e $a^2 c^2 (nd - qb)^2$ hanno parità diversa. Ne segue che $(mc - ap)^2$ e $(nd - qb)^2$ hanno parità diversa, dunque $mc - ap$ e $nd - qb$ hanno parità diversa. Pertanto, $m + p$ e $n + q$ hanno parità diversa, da cui $m + p + n + q$ è dispari. Pertanto, $m + n$ e $p + q$ hanno parità diversa. Dunque, i punti $(\frac{m}{a}, \frac{n}{b})$ e $(\frac{p}{c}, \frac{q}{d})$ non hanno lo stesso colore, altrimenti la somma dei numeratori sarebbe della stessa parità.

Così abbiamo fatto l'ultimo passo per risolvere un problema gigantesco su parità, numeri cromatici, classi di equivalenza, numeri razionali, ed altro ancora. Il risultato è sorprendente: pur senza sapere quale sia il numero cromatico del piano reale, almeno conosciamo quello del piano razionale, che è 2.