

Laboratorio di Matematica & Realtà

Università di Perugia

23 dicembre 2017

1 Bici elettriche, è boom in Cina

Nel 2012 le biciclette elettriche in circolazione nel mondo hanno raggiunto i 30 milioni di esemplari. Secondo le previsioni degli esperti del settore, l'aumento delle vendite di e-bike è un trend che continuerà; il mercato crescerà a un ritmo di 7,5 per cento annuo tra il 2012 e il 2018, fino ad arrivare ad un livello di vendite globali di circa 46,29 milioni di veicoli nel 2018.

A trainare la crescente diffusione di bici sarà la Cina, con l'89 per cento delle e-bike in circolazione, pari a 42 milioni di veicoli, e un giro d'affari che toccherà 11,9 miliardi di dollari nel 2018.



Famiglia Cristiana,
5 gennaio 2012

Problema. *Costruire un modello esponenziale che descriva la crescita di e-bike nel mondo nell'intervallo di tempo compreso tra il 2012 e il 2018.*

- Sia B_n il numero di biciclette vendute ogni anno nel mondo (in milioni) dal 2012 (anno zero) al 2018.

- Scrivere le equazioni ricorsive che definiscono la successione B_n

Le ipotesi di crescita si traducono nella definizione ricorsiva:

$$B_0 = 30$$

$$B_{n+1} = B_n + \frac{7.5}{100} B_n$$

- la seconda equazione si riscrive

$$B_{n+1} = \frac{107.5}{100} B_n$$

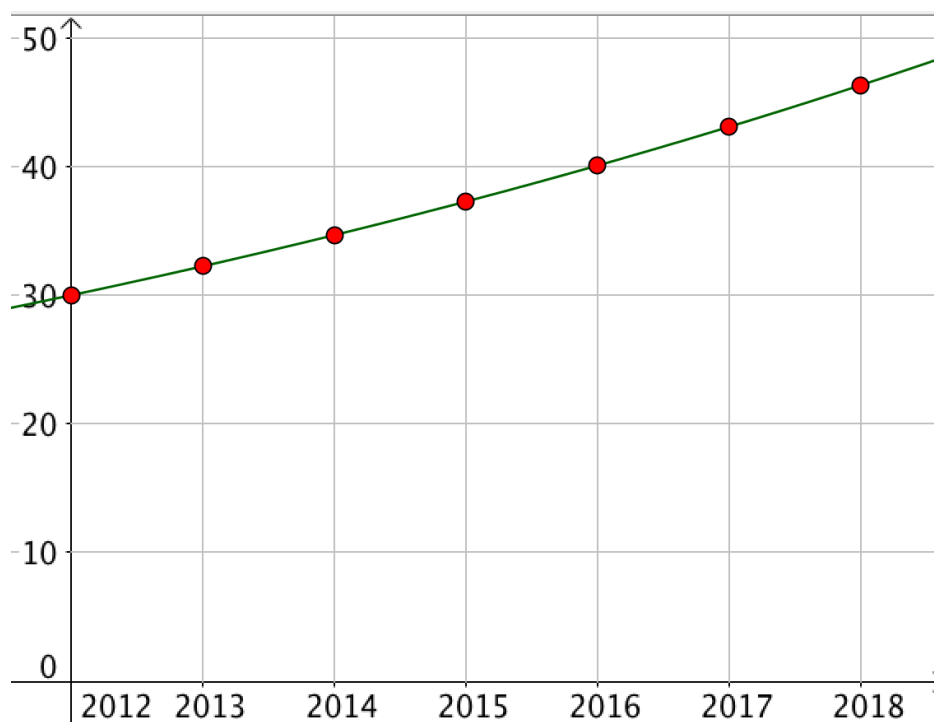
da cui riconosciamo che B_n è una *progressione geometrica* di ragione 107.5

- la successione è monotona crescente perchè è una progressione geometrica con ragione maggiore di 1.

- la formula analitica (o chiusa) è

$$B_n = 30\left(\frac{107.5}{100}\right)^n$$

- Nel 2018 il numero di e-bike vendute secondo il modello è dato da $B_6 = 30\left(\frac{107.5}{100}\right)^6 = 46.299$ circa, in accordo con la previsione di 46.29 milioni di e-bike.
- Il grafico cartesiano del numero di e-bike vendute dal 2012 al 2018 è dato da



2 SNAM fa il pieno di GAS

Con la domanda che cresce del 2 percento l'anno, il che vuol dire che da oggi al 2015 incrementerà del 30 percento, la nostra potenza di investimento di 1 miliardo di euro all'anno deve mantenersi ben oltre il 2010" afferma Malacarne (Amministratore Delegato di SNAM-ENI).

"Nel 2020 saranno necessari altri 40 miliardi di metri cubi di gas oltre i 73 importati oggi"

Problema. *Fare un modello della domanda annuale di gas per il periodo 2008-2015 assumendo che la domanda di gas cresca del 2% all'anno.*

- Sia D_n la domanda di gas nell'anno n a partire dal 2008 (anno zero).
- Scrivere la relazione tra D_n e D_{n-1}

$$D_n = D_{n-1} + 0.02D_{n-1} = 1.02D_{n-1}$$

- Spiegare perchè D_n è una *progressione geometrica* specificandone la ragione.

La relazione precedente mostra che D_n è una progressione geometrica di ragione 1.02.

- Spiegare perchè D_n è una successione monotona.

D_n è una progressione geometrica di ragione maggiore di 1, dunque è una successione monotona crescente.

- Determinare una formula chiusa (cioè, analitica) per la successione D_n , assumendo che D_0 sia un parametro del modello (cioè un dato non conosciuto.)

$$D_n = D_0(1.02)^n$$

- Verificare la correttezza dell'affermazione: "da oggi al 2015 la domanda crescerà del 30%".

L'affermazione non è corretta. Secondo il modello la previsione della crescita della domanda da oggi (anno 2008) al 2015 è data da

$$D_7 - D_0 = D_0(1.02)^7 - D_0 = D_0((1.02)^7 - 1) = 0.1486D_0$$

che rappresenta una crescita compresa tra il 14% e il 15%.



L'Espresso,
14 febbraio 2008.

- Dimostrare che l'affermazione: "Nel 2020 saranno necessari altri 40 miliardi di metri cubi di gas oltre i 73 importati oggi" è infondata se la crescita annua prevista è del 2%.

L'affermazione non è corretta. Secondo il modello, infatti, se la domanda nell'anno 2008 è $D_0 = 73$ miliardi di m^3 , allora la domanda prevista per il 2020 sarà $D_{12} = D_0(1.02)^{12} = 73(1.02)^{12} = 92.58$ miliardi di m^3 .

- Determinare la crescita percentuale annua compatibile con la previsione che "nel 2020 saranno necessari altri 40 miliardi di metri cubi di gas oltre i 73 importati oggi".
- Per determinare l'incremento (%) annuo compatibile con i dati e con la previsione relativa al 2020, adotteremo il modello della forma:

$$D_0 = 73$$

$$D_n = (1 + i)^n D_0$$

con la condizione:

$$D_{12} - D_0 = 40$$

che determina il valore di i :

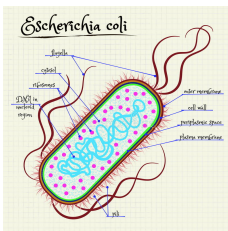
$$(1 + i)^{12} 73 - 73 = 40$$

$$\text{Da cui, } (1 + i)^{12} = \frac{113}{73},$$

$$\text{quindi } 1 + i = \sqrt[12]{\frac{113}{73}}$$

$$\text{e, infine, } i = \sqrt[12]{\frac{113}{73}} - 1$$

il tasso percentuale annuo di crescita è circa $0.037 = 3.7\%$.



3 Escherichia coli

Un abitante usuale dell'intestino umano è il batterio *Escherichia Coli*. Una cellula del batterio in brodo di coltura si divide in due ogni 20 minuti circa. La popolazione di una coltura di *Escherichia Coli* è composta inizialmente da 60 cellule.

- Qual è la relazione tra il numero di batteri e il tempo misurato in stadi di 20 minuti?

Sia B_n il numero di batteri presenti allo stadio n . Allora

$$B_0 = 60, B_n = 2B_{n-1} \text{ se } n > 0$$

$$\text{da cui } B_n = 2^n 60$$

- Qual è la relazione tra il numero di batteri e il tempo misurato in ore?

Sia C_n il numero di batteri presenti dopo n ore. Allora

$$B_0 = 60, C_n = B_{3n} = 2^{3n} 60 \text{ se } n > 0$$

- Dopo quante ore la popolazione conterà 20.000 cellule?

$$C_n = 2^{3n} 60 \geq 20000$$

$$\text{implica che } 2^{3n} \geq \frac{20000}{60} > 333 > 2^8$$

e concludiamo che $3n = 9$ ore, cioè $n = 3$ ore.

4 Spedizione di un poster

Un poster di formato A_0 , un rettangolo di dimensioni $84 \text{ cm} \times 118.8 \text{ cm}$, ha uno spessore di 0.15 mm . Per spedire il poster utilizzando una busta di formato A_4 oppure di formato A_6 sarà necessario piegarlo più volte.



- Modellare lo spessore del poster piegato in funzione del numero delle piegature. La piegatura avviene, come di consueto, sovrapponendo due lati opposti.

Denotato con S_n lo spessore del poster dopo n piegature, si ha:

$$S_n = 2^n S_0, S_0 = 0.15 \text{ mm}$$

Si deduce quindi la formula chiusa:

$$S_n = 2^n 0.15 \text{ mm}$$

- Quale sarà lo spessore del poster piegato in modo da essere inserito in una busta formato A_4 , di dimensioni $21 \text{ cm} \times 29.7 \text{ cm}$? Tenere presente che un foglio A_0 è composto da 16 fogli A_4 dello stesso spessore.

Osservato che sono necessarie 4 piegature per passare dal formato A_0 al formato A_4 , si deduce che

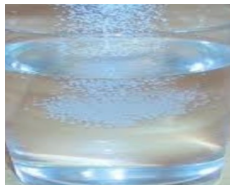
$$S_4 = 2^4 0.15 = 2.4 \text{ mm}$$

- Quale sarà lo spessore del poster piegato in modo da essere inserito in una busta formato A_6 , di dimensioni $10.5 \text{ cm} \times 14.8 \text{ cm}$? Tenere presente che un foglio A_4 è composto da 4 fogli A_6 dello stesso spessore.

Per passare dal formato A_4 al formato A_6 sono necessarie altre 2 piegature, quindi

$$S_6 = 2^2 2.4 = 9.6 \text{ mm}$$

5 La salamoia



Un serbatoio cilindrico contiene 200 Kg di sale disciolti in 4000 litri di acqua. Un flusso di acqua di circa 20 litri/minuto è immesso nel serbatoio nel suo punto più basso e lasciato defluire nel punto più alto del contenitore.

- Nell'ipotesi che la soluzione venga continuamente rimescolata, descrivere, con leggi ricorsive, come variano nel tempo le quantità di sale e acqua presenti nel serbatoio.

Scegliamo 1 minuto come unità di tempo. Dopo n minuti la soluzione sarà composta da S_n Kg di sale e A_n Kg di acqua (ricordiamo che 1 litro di acqua pesa 1Kg).

Per ipotesi,

$$S_0 = 200, A_0 = 4000$$

Scriviamo la relazione ricorsiva per S_n . La quantità di soluzione che esce ad ogni minuto è di 20 litri e di questi la proporzione di sale è quella $S_n = S_{n-1} - \frac{20}{4000} S_{n-1}$

- Quanto sale residuo è presente nel serbatoio dopo 10 minuti?
- Il termine *salamoia* è usato nel linguaggio comune per designare una soluzione di sale (cloruro di sodio) in acqua ad una concentrazione superiore a quella dell'acqua salata, compresa cioè tra 3.5% e 5%. Dopo quanto tempo, la soluzione perderà le caratteristiche della salamoia?
- In un processo a lungo termine, quale sarà la concentrazione della salamoia?