

# Modelli di epidemie

Carlo Andreatta, Mario Puppi

13 ottobre 2017

## 1 Modello SIR

Vogliamo studiare modelli dell'evoluzione di una malattia epidemica che colpisce una popolazione.

Il modello base usato dagli studiosi di epidemiologia è detto SIR perchè si assume che ogni individuo della popolazione possa trovarsi in uno ed uno solo dei tre stati seguenti:

- *suscettibile*: un individuo che possa essere infetto, ma che non è stato contagiato
- *infetto*: un individuo che è stato contagiato e che possa diffondere la malattia agli altri
- *rimosso*: un individuo che è stato contagiato ma non è più in grado di trasmettere ad altri la malattia.

Il numero dei Suscettibili varia nel tempo, per tutta la durata dell'epidemia, così come quello degli Infetti e quello dei Rimossi. Ad ogni unità di tempo  $t$  (che può essere un giorno, una settimana, un mese ...) assumeremo che

- $S_t$  sia il numero degli individui suscettibili
- $I_t$  sia il numero degli individui infetti
- $R_t$  sia il numero degli individui rimossi

Al tempo iniziale  $t = 0$  avremo  $S_0$  suscettibili,  $I_0$  infetti,  $R_0$  rimossi. Al tempo  $t = 1$ , avremo  $S_1$  suscettibili,  $I_1$  infetti,  $R_1$  rimossi, ...

**Assunzione 1.** *Il numero totale di individui  $N$  della popolazione rimane costante durante l'epidemia.*



Ciò significa che la popolazione complessiva è impermeabile ai cambiamenti: non ci sono nascite nè immigrazioni. Eventuali morti continuano a far parte della popolazione, nello stato di *Rimossi*, così come i guariti che non possono più contagiare gli altri. Esiste una costante  $N$  tale che per ogni tempo  $t$  si abbia

$$S_t + R_t + I_t = N$$

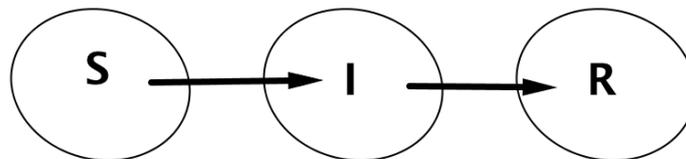
**Domanda 1.** *Assumiamo di avere una popolazione colpita da un'epidemia in cui vale l'assunzione di invarianza del numero totale di individui.*

- *Spiega perchè è ragionevole trascurare morti o immigrazioni nel fare il modello della diffusione di varicella in una scuola elementare.*
- *Quali possono essere le caratteristiche di una malattia e di una popolazione per le quali non sia giustificabile l'assunzione 1? Puoi dare un esempio?*

Un'altra ipotesi che faremo è che durante l'epidemia la popolazione sia sempre *mescolata in modo omogeneo*:

**Assunzione 2.** *Ogni individuo della popolazione abbia mediamente lo stesso numero di contatti per unità di tempo con tutti gli altri individui.*

Questa assunzione sembra ragionevole nel caso di piccole popolazioni chiuse di animali come mandrie oppure greggi. Nel modello SIR ad ogni



passo del tempo (misurabile in ore, giorni, settimane, ...) un individuo può cambiare stato secondo le regole:

- un individuo suscettibile rimane tale oppure diventa infetto
- un individuo infetto rimane tale oppure diventa rimosso
- un individuo rimosso rimane tale

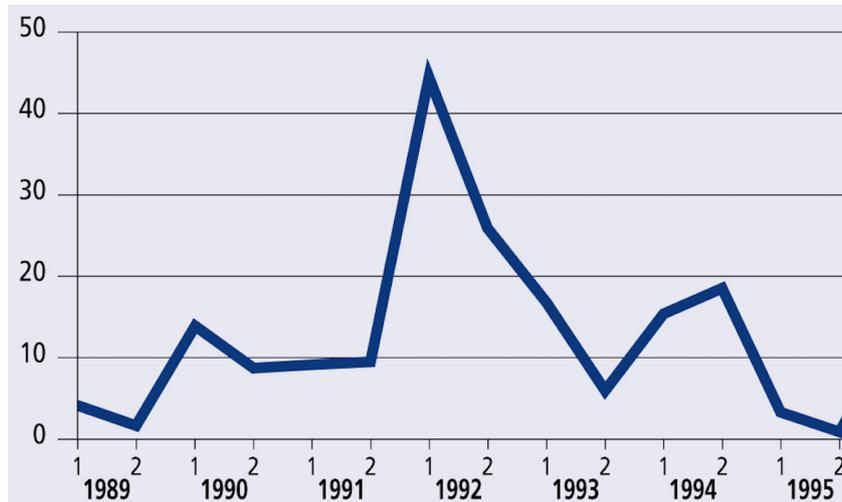
Il modello SIR è usato per fare delle previsioni sullo stato futuro ( $S(t+1), I(t+1), R(t+1)$ ) della popolazione nel tempo  $t+1$  partendo dalla conoscenza dello stato ( $S(t), I(t), R(t)$ ) al tempo  $t$ .

**Domanda 2.** *Un modello SIR è adatto a descrivere*

- *un'epidemia di morbillo?*
- *una diffusione di pidocchi nei capelli dei bambini (e delle loro mamme) in una scuola elementare?*

**Domanda 3.** *Spiega perchè in un modello SIR*

- *$t \rightarrow S(t)$  sarà una funzione decrescente e  $0 \leq S(t) \leq N$*
- *$t \rightarrow R(t)$  sarà una funzione crescente e  $0 \leq R(t) \leq N$*



Il grafico mostra l'evoluzione del numero di infetti (unità di misura: numero di individui infetti ogni 100 000 abitanti) dell'epatite A nella regione Puglia, tra il 1989 e il 1995 (unità di tempo: semestre). Notiamo che si ha un picco dell'epidemia nel primo semestre del 1992.

**Domanda 4.** *Spiegare la ragionevolezza delle ipotesi seguenti:*

- *La variazione  $S(t+1) - S(t)$  è proporzionale a  $I(t)$*
- *La variazione  $I(t+1) - I(t)$  è proporzionale a  $I(t)$  e il fattore di proporzionalità dipende dal numero  $S(t)$*

## 2 Contagio e coefficiente di trasmissione

Il contagio avviene durante un'interazione tra un suscettibile e un infetto. Non è detto che da un'interazione si abbia necessariamente un contagio, per cui la chiameremo un *incontro a rischio*. Nell'ipotesi di mescolamento omogeneo tra infetti e suscettibili è ragionevole la seguente

### Assunzione 3.

*Ogni individuo incontra mediamente la stessa frazione  $k$  (frequenza di interazione) di individui della popolazione nell'unità di tempo (ad esempio,  $k$  persone al giorno)*

**Domanda 5.** *Nell'ipotesi di mescolamento omogeneo, con coefficiente di interazione  $k$*

- *qual è il numero medio di incontri a rischio nell'unità di tempo per una persona suscettibile?*
- *qual è il numero medio di incontri a rischio nell'unità di tempo per tutta la popolazione?*

Assumiamo che

### Assunzione 4.

*La probabilità che da un incontro a rischio derivi un contagio sia  $p$*

**Domanda 6.** • *qual è la probabilità che al tempo  $t$  di un'epidemia un individuo suscettibile sia contagiato?*

- *qual è il numero medio di nuovi contagi nel tempo  $t$  dell'epidemia?*

### Definizione 1.

*Il coefficiente di trasmissione di un'epidemia è dato da  $\alpha = kp$*

**Assunzione 5. (Principio dell'azione di massa).** *Il numero medio di nuovi contagi al tempo  $t$  è dato da  $\alpha S_t I_t$*

- se  $\alpha_1 = 0.01$  è il coefficiente di trasmissione di una malattia e  $\alpha_2 = 0.2$  è il coefficiente di un'altra malattia, qual è la differenza tra le due malattie?
- Se questa è l'unica differenza tra le due malattie, quale delle due si diffonde più velocemente?

**Evoluzione del numero di suscettibili** Siccome il numero di nuovi contagi fa diminuire il numero di suscettibili l'equazione dell'evoluzione è

$$S_{t+1} = S_t - \alpha S_t I_t$$



### 3 Rimozione e coefficiente di rimozione

Durante l'evoluzione della malattia, misurata con un'unità di tempo che è il giorno, il numero di infetti cresce nel giorno  $t$  della quantità  $\alpha S_t I_t$ . Nello stesso giorno, però c'è una variazione in uscita, alcuni infetti guariscono oppure muoiono.

**Assunzione 6.** *Durante l'epidemia la frazione di individui infetti che vengono rimossi nell'unità di tempo è una costante  $\gamma$ .*

Abbiamo così l'equazione dell'evoluzione dei rimossi:

$$R_{t+1} = R_t + \gamma I_t$$

e l'equazione dell'evoluzione degli infetti:

$$I_{t+1} = I_t + \alpha S_t I_t - \gamma I_t$$

### 4 Durata della malattia e guarigione

**Esercizio 1.** *Assumiamo che l'unità di tempo dell'epidemia sia il giorno e che il coefficiente di trasmissione sia  $\alpha$ . Se il primo giorno c'erano  $I_1$  individui suscettibili quanti saranno in media gli individui suscettibili nel giorno 2?*

**Esercizio 2.** *Studiare l'evoluzione di una popolazione colpita da un'epidemia usando un modello SIR con parametri  $N = 100, \alpha = 0.001, \gamma = 0.05$*

1. *Variare le condizioni iniziali  $S_0, I_0$ . Come cambia l'evoluzione della popolazione al cambiare dei dati iniziali? Ci sono delle scelte tali che il numero degli infetti cresca nelle prima fase dell'epidemia?*
2. *Tenuti fissi gli altri parametri, far variare il coefficiente di trasmissione  $\alpha$  Spiegare gli effetti sul comportamento dell'evoluzione.*
3. *Tenuti fissi gli altri parametri, far variare il coefficiente di rimozione  $\gamma$  Spiegare gli effetti sul comportamento dell'evoluzione.*



**Esercizio 3.** *La malaria è una malattia parassitaria che si trasmette agli esseri umani attraverso una zanzara infetta. Una zanzara diventa assume le uova dei parassiti con la malattia quando punge una persona infetta. I parassiti crescono dentro alla zanzara e dopo una settimana la zanzara può trasmettere la malattia agli essere umani che punge. E' appropriato usare un modello SIR per descrivere una popolazione colpita da malaria?*

**Esercizio 4.** *Il tasso di rimozione  $\gamma$  può essere stimato se abbiamo i dati sulla durata dello stato di infezione per gli individui della popolazione.*

1. *Supponiamo che la durata media dell'infezione per gli individui contagiati da una malattia sia di 8 giorni. Nell'ipotesi che il numero  $I_t$  di infetti sia abbastanza grande in ogni tempo  $t$  dell'epidemia qual è la media percentuale della popolazione degli infetti che viene rimossa ogni giorno?*
2. *In generale, se  $m$  giorni è la durata media dell'infezione negli individui colpiti dalla malattia qual è il valore stimato per il tasso di rimozione  $\gamma$ ?*

**Esercizio 5.** *In un'epidemia di rosolia*

- *ogni persona che si ammala rimane infetta per 11 giorni e poi guarisce*
- *il numero di individui che sono infetti da  $k$  giorni sia lo stesso per  $k = 1, 2, \dots, 11$ .*

*quanti sono gli individui che dopo  $n > 0$  giorni dall'inizio dell'epidemia guariscono dalla malattia?*

**Esercizio 6.** *Assumiamo che ogni giorno guarisca il 20% degli infetti e il giorno  $n$  ci siano  $I_n$  infetti e  $S_n$  suscettibili.*

- *quanti saranno gli infetti il giorno  $n + 1$ ?*
- *quanti saranno i rimossi il giorno  $n + 1$ ?*

**Esercizio 7.** *Nel corso di un'epidemia*

- *qual è la probabilità che il giorno  $n$  dall'inizio dell'epidemia un malato guarisca il giorno stesso?*
- *qual è la probabilità che un malato ricoverato dal primo giorno dell'epidemia guarisca il terzo giorno?*
- *qual è la probabilità che un malato ricoverato il giorno  $n$  guarisca in 3 giorni?*
- *qual è la probabilità che un malato ricoverato dal primo giorno guarisca in  $k$  giorni?*
- *qual è la probabilità che un malato ricoverato dal primo giorno guarisca?*
- *qual è il numero medio di giorni che un malato rimarrà ricoverato?*