Matrici e modelli

Federico Roncaglia

13 Ottobre 2017

Tre Istituti A, B e C si trovano nella Cittadella Scolastica di Mirano. Ogni anno, una frazione degli studenti dell'Istituto A decide di cambiare scuola e di trasfersi nell'Istituto B. Allo stesso modo, una frazione degli studenti dell'Istituto B si sposta nell'Istituto A. Dall'Istituto C un'altra frazione di studenti si sposta nell'Istituto B e dall'Istituto A una frazione ancora diversa di persone si trasferisce in C. Le frazioni di studenti che cambiano scuola rimangono costanti nel tempo.

Esiste una situazione in cui il numero di studenti di ciascun Istituto rimane costante negli anni? (Tale situazione si dirà di equilibrio.)

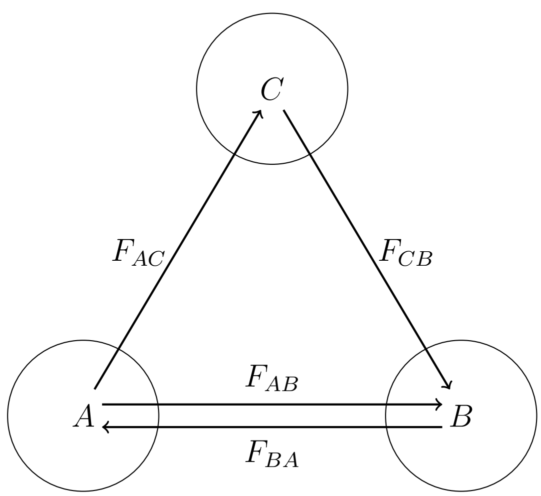

Figura 1: Schema del sistema.

1 Ipotesi

Chiamiamo a, b, c la popolazione (il numero di studenti) rispettivamente negli istituti A, B, C. Indichiamo la frazione di studenti di A che si sposta da A a B con la notazione F_{AB}: si tratta del rapporto tra il numero degli studenti che si spostano da A a B e la popolazione a dell'Istituto di partenza. Similmente, F_{BA} è la frazione di studenti di B che si spostano in A, F_{CB} è la frazione degli studenti di C che si spostano in B ed F_{AC} è la frazione degli studenti di A che si spostano in C (Tabella 1).

Tabella 1: Specchietto degli spostamenti.

Frazione	**Spostamento**
F_{AB}	$A \to B$
F_{BA}	$B \to A$
F_{CB}	$C \to B$
F_{AC}	$A \to C$

Se volessimo per esempio calcolare quante persone si muovono in un certo anno dall'Istituto A all'Istituto B, dovremmo moltiplicare la popolazione di A in quell'anno con la frazione di persone che ogni anno si muovono da A a B: $F_{AB}a$.

Come potremmo rappresentare la situazione (*stato*) del sistema in un certo anno? Ci basta conoscere la popolazione di ogni istituto nell'anno voluto, perché le frazioni di studenti che ogni anno cambiano Istituto sono costanti. Possiamo usare un terna ordinata di numeri

$$\mathbf{s} = (a, b, c)$$

che, di fatto, è un vettore a tre dimensioni.

L'anno successivo, in seguito allo spostamento di un certo numero di studenti tra gli Istituti, lo stato del sistema cambia. Per quanto riguarda A, $F_{AB}a$ studenti abbandonano l'Istituto A andando in B, ed altri $F_{AC}a$ studenti si trasferiscono da A a C. In compenso, A può contare su $F_{BA}b$ nuovi iscritti. Indichiamo lo stato nell'anno successivo con $\mathbf{s}' = (a', b', c')$. La nuova popolazione di A sarà:

$$a' = a - F_{AB}a - F_{AC}a + F_{BA}b \tag{1}$$

In modo analogo, la popolazione di B e quella di C diventeranno:

$$b' = b - F_{BA}b + F_{AB}a + F_{CB}c \tag{2}$$

$$c' = c - F_{CB}c + F_{AC}a \tag{3}$$

2 Tesi

Il problema ci chiede di dimostrare l'esistenza di una situazione di equilibrio, che in genere viene chiamata *punto fisso*: uno stato tale che, nonostante il passare degli anni, il numero di studenti in ciascuno dei tre Istituti non varî.

3 Dimostrazione

Dobbiamo dimostrare l'esistenza di a, b e c tali che $\mathbf{s} = \mathbf{s}'$, cioè

$$(a, b, c) = (a', b', c')$$

o, in altra forma:

$$\begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \end{cases}$$

Sostituiamo a', b' e c' con la (1), la (2) e la (3):

$$\begin{cases} a = a - F_{AB}a - F_{AC}a + F_{BA}b \\ b = b - F_{BA}b + F_{AB}a + F_{CB}c \\ c = c - F_{CB}c + F_{AC}a \end{cases}$$

Infine ordiniamo il sistema in a, b, c:

$$\begin{cases} (F_{AB} + F_{AC})a - F_{BA}b = 0 \\ F_{AB}a - F_{BA}b + F_{CB}c = 0 \\ F_{AC}a - F_{CB}c = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Dal determinante del sistema possiamo ottenere informazioni sulle soluzioni: se otteniamo un determinante nullo, o il sistema è indeterminato (cioè ammette infinite soluzioni), o impossibile (non ammette soluzioni). Altrimenti il sistema ha un'unica soluzione.

$$\Delta = \left\| \begin{array}{ccc} (F_{AB} + F_{AC}) & -F_{BA} & 0 \\ F_{AB} & -F_{BA} & F_{CB} \\ F_{AC} & 0 & -F_{CB} \end{array} \right\|$$

Applichiamo la regola di Sarrus:

$$\Delta = (F_{AB} + F_{AC})F_{BA}F_{CB} - F_{BA}F_{CB}F_{AC} - F_{BA}F_{AB}F_{CB} = 0 \tag{5}$$

Per la (5), e poiché i termini noti in (4) sono nulli, il sistema ammette infinite soluzioni: quindi, esiste una situazione di equilibrio. ■

Proviamo ora ad ottenere l'insieme delle soluzioni risolvendo il sistema (4):

$$\begin{cases} a = \frac{F_{BA}}{F_{AB}+F_{AC}}b \\ c = \frac{F_{AC}}{F_{CB}}a = \frac{F_{AC}F_{BA}}{(F_{AB}+F_{AC})F_{CB}}b \end{cases}$$

Ci rendiamo conto che una delle tre incognite rimane come parametro. Possiamo scrivere l'insieme delle soluzioni in forma parametrica sostituendo t a b:

$$\begin{cases} a = \frac{F_{BA}}{F_{AB}+F_{AC}}t \\ b = t \\ c = \frac{F_{AC}F_{BA}}{(F_{AB}+F_{AC})F_{CB}}t \end{cases} \tag{6}$$

oppure, in forma vettoriale,

$$t\left(\frac{F_{BA}}{F_{AB} + F_{AC}},\ 1,\ \frac{F_{AC}F_{BA}}{(F_{AB} + F_{AC})F_{CB}}\right) \tag{7}$$

dove $t \in \mathbb{R}^+$.[1]

4 Introduciamo le matrici

Riscriviamo le equazioni (1), (2) e (3), che regolano l'evoluzione nel tempo del sistema considerato:

$$\begin{cases} a' = a - F_{AB}a - F_{AC}a + F_{BA}b \\ b' = b - F_{BA}b + F_{AB}a + F_{CB}c \\ c' = c - F_{CB}c + F_{AC}a \end{cases} \tag{8}$$

Una maniera ancora più sintetica di scrivere queste equazioni è trovare una matrice M, detta *di trasformazione*, che permetta di passare dallo stato $\mathbf{s}$ allo stato $\mathbf{s}'$ con un semplice prodotto di matrici:

$$\mathbf{s}' = \mathbf{s}M$$

[1] Per essere pignoli, non tutti i valori di t in $\mathbb{R}^+$ sono accettabili. Dovremmo scegliere t affinché $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$, perché a, b e c indicano un numero naturale di persone.

Prodotto righe per colonne

Prima di cominciare, è necessario dare una definizione pratica di prodotto tra matrici, detto anche *righe per colonne*: date le matrici A e B, di dimensioni (m, n) ed (n, k) rispettivamente, il loro prodotto $C = A \cdot B$ è a sua volta una matrice di dimensioni (m, k):

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \\ b_{4,1} & b_{4,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \\ c_{3,1} & c_{3,2} \end{pmatrix}$$

- Per trovare $c_{1,1}$, dobbiamo sommare i prodotti tra ogni elemento della **prima** riga di A ed il rispettivo elemento della **prima** colonna di B:

$$c_{1,1} = a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + a_{1,3}b_{3,1} + a_{1,4}b_{4,1}$$

- Per trovare $c_{1,2}$, dobbiamo sommare i prodotti tra ogni elemento della **prima** riga di A ed il rispettivo elemento della **seconda** colonna di B:

$$c_{1,2} = a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} + a_{1,3}b_{3,2} + a_{1,4}b_{4,2}$$

  ...

- Per trovare $c_{2,1}$, dobbiamo sommare i prodotti tra ogni elemento della **seconda** riga di A ed il rispettivo elemento della **prima** colonna di B:

$$c_{2,1} = a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} + a_{2,3}b_{3,1} + a_{2,4}b_{4,1}$$

  ...

Il numero delle colonne della prima matrice moltiplicanda dev'essere uguale al numero delle righe della seconda. Altrimenti, il prodotto non può essere definito.

Il prodotto tra matrici **non è commutativo**.

Bisogna trovare dunque una matrice M tale che

$$(a', b', c') = (a, b, c) \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix} =$$
$$= ((am_{1,1} + bm_{2,1} + cm_{3,1}),\ (am_{1,2} + bm_{2,2} + cm_{3,2}),\ (am_{1,3} + bm_{2,3} + cm_{3,3}))$$

cioè dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} a' = am_{1,1} + bm_{2,1} + cm_{3,1} \\ b' = am_{1,2} + bm_{2,2} + cm_{3,2} \\ c' = am_{1,3} + bm_{2,3} + cm_{3,3} \end{cases} \tag{9}$$

Sostituiamo quindi a', b' e c' utilizzando la (8):

$$\begin{cases} a - F_{AB}a - F_{AC}a + F_{BA}b = am_{1,1} + bm_{2,1} + cm_{3,1} \\ b - F_{BA}b + F_{AB}a + F_{CB}c = am_{1,2} + bm_{2,2} + cm_{3,2} \\ c - F_{CB}c + F_{AC}a = am_{1,3} + bm_{2,3} + cm_{3,3} \end{cases}$$

Raccogliamo i termini simili:

$$\begin{cases} (1 - F_{AB} - F_{AC})a + F_{BA}b = am_{1,1} + bm_{2,1} + cm_{3,1} \\ F_{AB}a + (1 - F_{BA})b + F_{CB}c = am_{1,2} + bm_{2,2} + cm_{3,2} \\ F_{AC}a + (1 - F_{CB})c = am_{1,3} + bm_{2,3} + cm_{3,3} \end{cases}$$

Per confronto tra polinomi al primo ed al secondo membro di ogni equazione, possiamo finalmente ricavare M:

$$M = \begin{pmatrix} 1 - F_{AB} - F_{AC} & F_{AB} & F_{AC} \\ F_{BA} & 1 - F_{BA} & 0 \\ 0 & F_{CB} & 1 - F_{CB} \end{pmatrix} \tag{10}$$