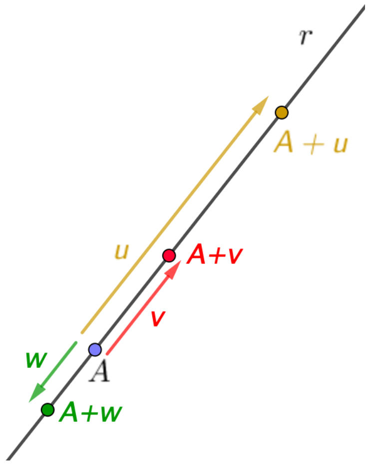
1. Descrizione di rette nello spazio.



1. Direzione di una retta. Data una retta r nello spazio, vogliamo descriverne la *direzione*, ossia l'insieme D_r di tutti i vettori dello spazio che sono *paralleli* alla retta r.

Pensiamo ai vettori di D_r come alle traslazioni dello spazio che lasciano invariata la retta r. Precisamente,

preso un vettore v nello spazio, sarà $v \in D_r$ se e solo se

(1) per ogni punto $X \in r$ si ha $X + v \in r$

Per verificare che un vettore v appartenga alla direzione D_r non è necessario che esso soddisfi la condizione (1) per tutti i punti X della retta r. E' sufficiente che v verifichi il test (1) per un solo punto della retta r. Questa semplificazione ci fornisce un modo effettivo per sapere se un vettore v appartiene alla direzione di una retta r, basta fare il test della direzione su un solo punto $X = A$ della retta r:

(2) $v \in D_r$ se e solo se $A + v \in r$

Questo ci mette in grado di risolvere il

Problema 1. Sono dati punti $A = (1, 2, 1), B = (3, 2, 2)$ della retta r. Determinare la direzione della retta r, ossia l'insieme D_r di tutti i vettori dello spazio che sono *paralleli* a r.

Procediamo per passi, spezzando cioè il problema in una sequenza di problemini più semplici.

Troviamo un vettore della direzione D_r. Niente di più facile, avendo solo due dati A, B non ci vuole molto a trovare il vettore $v = B - A = (3, 2, 2) - (1, 2, 1) = (2, 0, 1)$ che trasla A su B, soddisfa quindi la condizione (2) e fa al caso nostro.

Il secondo passo è decisamente più concettuale. I vettori della direzione D_r sono in quantità infinita, ma hanno tutti la stessa direzione e due di loro sono sempre legati da un rapporto numerico. E' in qualche modo un assioma delle traslazioni di una retta che ci consente di affermare che, preso un vettore w

(3) $w \in D_r$ se e solo se esiste un numero reale k tale che $w = kv$

Ora si ha $kv = k(2, 0, 1) = (2k, 0, k)$ e possiamo concludere che

$w \in D_r$ se e solo se esiste un numero k tale che $w = (2k, 0, k)$

2. Descrizione parametrica di una retta. Vogliamo descrivere l'insieme dei punti di una retta r nello spazio, di cui conosciamo la direzione D_r e uno dei suoi punti A.

Continuiamo l'esercizio precedente, in cui conosciamo un punto $A = (1, 2, 1)$ e la direzione $D_r = \{(2k, 0, k) : k \in R\}$ di una retta r.

L'insieme dei punti $P \in r$ può essere descritto come l'insieme di tutti i punti $A + u$ ottenuti al variare dei vettori $u \in D_r$:

$r = \{A + u : u \in D_r\} = \{(1, 2, 1) + (2k, 0, k) : k \in R\}$

in conclusione:

$r = \{(1 + 2k, 2, 1 + k) : k \in R\}$

3. Equazioni parametriche di una retta. Scriviamo ora le *equazioni parametriche* di una retta r di cui conosciamo la descrizione parametrica $r = \{(1 + 2k, 2, 1 + k) : k \in R\}$

Un punto $(x, y, z$ dello spazio appartiene alla retta $r = \{(1 + 2k, 2, 1 + k) : k \in R\}$ se e solo se esiste un numero k tale che

$(x, y, z) = (1 + 2k, 2, 1 + k)$

che possiamo scrivere in forma di sistema di tre equazioni:

$$\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 2 \\ z = 1 + k \end{cases}$$

le *equazioni parametriche* della retta r, appunto.