Esercizio 1. *Incidenza tra due rette.*
Sono date le rette r, s di equazioni:

$$\text{r: } \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 6 - t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

$$\text{s: } \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

- Dimostra che r e s non sono parallele.

  La direzione di r è $D_r = \{t(-2, -1, 1) : t \in \mathbf{R}\}$ che non ha tra i suoi elementi il vettore $(2, -3, 1)$, parallelo alla retta s.

  La prova dell'asserzione è che $t(-2, -1, 1) = (2, -3, 1)$ implica $t(-2) = 2, t(-1) = -3, t1 = 1$, da cui segue che $t = -1, t = 3, t = 1$, condizione che non può essere soddisfatta da alcun numero reale t.

- Trova l'intersezione $s \cap r$.

  Risolviamo il sistema, facendo attenzione a non fare l'errore logico di usare lo stesso simbolo t come parametro. Se $A = r \cap s$ allora esiste $t \in \mathbf{R}$ tale che $A = (2 - 2t, 6 - t, -1 + t)$ ed esiste $u \in \mathbf{R}$ tale che $A = (2u, 1 - 3u, 2 + u)$. Ne segue che $2 - 2t = 2u$, da cui $u = 1 - t$. Le altre due uguaglianze $6 - t = 1 - 3u, -1 + t = 2 + u$ si possono riscrivere come $6 - t = 1 - 3(1 - t), -1 + t = 2 + (1 - t)$, equivalenti entrambe a $t = 2$. Il sistema ammette come soluzione il punto $A = (2 - 4, 6 - 2, -1 + 2) = (-2, 4, 1)$.

- Le rette sono incidenti nel punto A.

  Siccome le rette r, s non sono sghembe esiste un piano α che le contiene. La sua direzione è data da $D_\alpha = D_r + D_s = \{t(-2, -1, 1) + u(2, -3, 1) : t, u \in \mathbf{R}\}$. Possiamo prendere un qualsiasi punto del piano, per esempio A stesso per generare i punti di α traslando A in tutti i modi possibili con vettori di D_α:

  $$\alpha = A + D_\alpha = \{A + t(-2, -1, 1) + u(2, -3, 1) : t, u \in \mathbf{R}\}$$

Esercizio 2. *Relazioni tra un punto e un piano.* Sono dati il punto $A = (2, 1, 0)$ e il piano α di equazione $x - y + 3z + 1 = 0$.

- Determina la retta r passante per A, ortogonale ad α.

La retta r è data dall'insieme dei punti $A+v$ che si ottengono traslando A di un vettore $v \in D_r$. La direzione D_r, ortogonale al piano α, è data da tutti i vettori tn_α, $t \in \mathbf{R}$, paralleli al vettore $n_\alpha = (1, -1, 3)$ normale al piano α.

Ne segue che $(x, y, z) \in r$ se e solo se $(x, y, z) = (2, 1, 0) + t(1, -1, 3) = (2+t, 1-t, 3t)$, da cui le equazioni parametriche di r:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3t \end{cases}$$

- Determina il piano β passante per A e parallelo al piano α.

  Il piano β ha la stessa direzione di α, data da tutti i vettori ortogonali a n_α. Un punto $P = (x, y, z)$ appartiene a β se è della forma $P = A + u$, con u ortogonale a n_α, come dire che $P-A$ è ortogonale a n_α, ossia $(x-2, y-1, z-0)\cdot(1, -1, 3) = 0$. Ne segue l'equazione cartesiana del piano β:

$$(x - 2) + (-1)(y - 1) + 3z = 0$$

- Determina se esistono dei piani passanti per A e perpendicolari ad α.

  Un piano γ è perpendicolare al piano α se e solo se il suo vettore normale n_γ è ortogonale al vettore n_α. Ad esempio, il vettore $w = (1, 1, 0)$ è ortogonale a n_α. Ne segue che il piano che passa per A con vettore normale w è perpendicolare ad α.