

Proprietà di Lipschitz delle funzioni

Mario Puppi

maggio 2019

1 Le funzioni lipschitziane

Quando facciamo il grafico di una funzione $f(x)$ definita su una variabile x razionale, calcoliamo alcuni valori di f ,

$$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots$$

su una lista di punti razionali del dominio di f :

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots$$

disegniamo poi i punti del grafico di f

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots$$

A questo punto facciamo un atto di fede e assumiamo che la funzione f vari da un punto all'altro in modo "liscio" o "continuo" per cui il grafico di f si possa tracciare senza mai staccare la penna dal foglio. In particolare, assumiamo che il valore $f(x)$ non faccia salti improvvisi, supponiamo cioè che

il valore di $f(x)$ abbia una variazione piccola se x ha una variazione piccola

Uno dei problemi fondamentali del Calculus è

misurare di quanto può variare $f(x)$ quando x subisce una variazione.

Si tratta di misurare il *grado di continuità* della funzione $f(x)$.

Più in generale, abbiamo la classe delle *funzioni di Lipschitz* che svolgono un ruolo importante nelle applicazioni.

Definizione 1. Una funzione f definita su un intervallo I della retta reale $\mathbb{R}$, a valori in $\mathbb{R}$, è detta *lipschitziana su I* se per ogni $x_1, x_2 \in I$ si ha

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq k|x_2 - x_1|$$

Esercizio 1. Dimostrare che le funzioni costanti $f(x) = k$ sono definite e lipschitziane su ogni intervallo I della retta reale.

2 Le funzioni lineari.

Esercizio 2. Sia $f(x) = mx + b$ una funzione lineare, con $m, b \in \mathbb{R}$ numeri razionali dati. Dimostrare che f è lipschitziana sull'intervallo $I = \mathbb{R}$.

Siano $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ due numeri dati e $f(x_1) = mx_1 + b$, $f(x_2) = mx_2 + b$ i valori di $f(x)$ nei due punti x_1, x_2 .

Il cambiamento dell'input è $|x_2 - x_1|$ e il cambiamento dell'output è $|f(x_2) - f(x_1)|$, mentre la relazione tra i due è data dalla costante $|m|$:

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |(mx_2 + b) - (mx_1 + b)| = |m||x_2 - x_1|$$

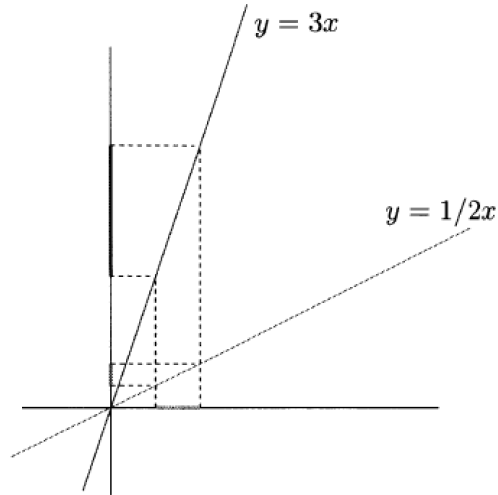
In altre parole, la distanza sulla retta reale tra i valori che la funzione f assume su due punti x_1, x_2 della retta è proporzionale alla distanza $|x_2 - x_1|$ tra i due punti. f è una similitudine della retta reale $\mathbb{R}$ e il rapporto di similitudine è dato dalla costante di proporzionalità $|m| = \frac{|f(x_2) - f(x_1)|}{|x_2 - x_1|}$.

Notiamo che la *pendenza* di f ha valore assoluto $|m|$. Ciò significa che è piccola la variazione dell'output $|f(x_2) - f(x_1)|$, a cui siamo interessati, se è piccola la variazione $|x_2 - x_1|$ dell'input della funzione lineare f . Questa proprietà è una matematizzazione dell'idea intuitiva che una funzione lineare vari in modo continuo.

Esempio 3. Sia $f(x) = 1.7x$ il costo in euro per acquistare x kg di farina. Una variazione nella spesa $f(x)$ di 5.1 euro corrisponde ad un incremento di 3kg della quantità x di farina comprata. La relazione lineare è lipschitziana con costante di Lipschitz data da 1.7.

La pendenza m della funzione lineare $f(x) = mx + b$ misura il cambiamento del valore della funzione per un cambiamento dell'input x . Più grande è $|m|$ più la retta è ripida e più grande è il cambiamento della funzione per un dato cambiamento dell'input. La figura mette a confronto due funzioni lineari che mostrano

un diverso cambiamento in output per lo stesso cambiamento in input:



Esercizio 4. Siano $f_1(x) = 4x + 1$ e $f_2(x) = 100x - 5$.

- Per incrementare il valore di $f_1(x)$ di .01, di quanto deve aumentare x ?
- Per incrementare il valore di $f_2(x)$ di .01, di quanto deve aumentare x ?

Esempio 5. Dimostrare che se f è lipschitziana sull'intervallo I con costante k allora f è lipschitziana con costante L per ogni numero $L \geq k$.

3 Le funzioni quadratiche

Esempio 6. Dimostriamo che $f(x) = x^2$ è lipschitziana sull'intervallo $I = [-2, 2]$. Siano x_1, x_2 due numeri nell'intervallo $[-2, 2]$.

1. Misuriamo la distanza di x_1 da x_2 : $|x_2 - x_1|$
2. Misuriamo la variazione corrispondente del valore di $f(x)$:
 $|f(x_2) - f(x_1)| = |x_2^2 - x_1^2|$

3. L'obiettivo è di stimare la variazione di $f(x)$ rispetto alla variazione $|x_2 - x_1|$ della variabile x , facciamo in modo di estrarre esplicitamente dall'espressione $|x_2^2 - x_1^2|$ la quantità $|x_2 - x_1|$. Usiamo un vecchio trucco:

$$|x_2^2 - x_1^2| = |(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)| = |(x_2 + x_1)| |x_2 - x_1|$$

4. Concentriamo tutta la nostra attenzione sull'espressione $|(x_2 + x_1)|$. Essa è variabile perchè x_1, x_2 possono variare, ma ci basterà far vedere che il suo valore è limitato da una costante k :

$$|(x_2 + x_1)| \leq k$$

per ogni $x_1, x_2 \in [-2, 2]$ In effetti, $x_2 + x_1$ è sempre costretta nell'intervallo $[-4, 4]$ quando $x_1, x_2 \in [-2, 2]$ per cui $|(x_2 + x_1)| \leq 4$ per ogni $x_1, x_2 \in [-2, 2]$.

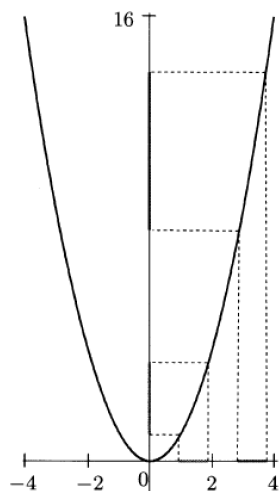
5. Ciò conclude la prova che f è lipschitziana con costante $k = 4$ dato che $|f(x_2) - f(x_1)| \leq 4|x_2 - x_1|$ per ogni $x_1, x_2 \in [-2, 2]$.

La proprietà di Lipschitz è un modo per quantificare l'idea intuitiva che una funzione sia continua su un dato intervallo I , fornendo un numero, la costante di Lipschitz k , che misura il grado di continuità di $f(x)$ sull'intervallo I in cui può variare x . Se la costante k di Lipschitz di f su I è piccola allora piccole variazioni nell'input x producono piccoli cambiamenti nell'output $f(x)$. Se la costante k è grande allora significa che anche piccole variazioni di x possono produrre grandi cambiamenti al valore di $f(x)$.

E' importante tener presente che si ha una certa imprecisione nella definizione di Lipschitz e dobbiamo essere cauti nel trarre conclusioni quando la costante di Lipschitz è grande. Il fatto è che la relazione di Lipschitz $|f(x_2) - f(x_1)| \leq |x_2 - x_1|$ fornisce solo una stima del valore massimo che può avere la variazione di $f(x)$. In pratica, il valore effettivo della variazione $|f(x_2) - f(x_1)|$ può essere anche molto più piccolo della stima fatta con la costante k .

Esercizio 7. Dimostrare che $f(x) = x^2$ è lipschitziana sull'intervallo $I = [2, 4]$ con costante di Lipschitz 8.

La costante di Lipschitz per $f(x) = x^2$ è più grande sull'intervallo $[2, 4]$ che su $[-2, 2]$. Il grafico di f mostra, in effetti, che piccole variazioni per x vicino a 4 producono variazioni maggiori



sul valore di $f(x)$ rispetto a variazioni della stessa entità fatte nelle vicinanze di $x = 2$.

La condizione di Lipschitz non è più soddisfatta per $f(x) = x^2$ su un intervallo che sia tutta la retta reale:

Esercizio 8. Dimostrare che $f(x) = x^2$ non è lipschitziana sull'intervallo $I = \mathbb{R}$

Esercizio 9. Dimostrare che $f(x) = x^2$ non è lipschitziana sull'intervallo $\{x|x \geq 1\}$

Esercizio 10. Dimostrare che $f(x) = x^2 + 1$ è lipschitziana sull'intervallo $[2, 3]$.

Esercizio 11. Dimostrare che $f(x) = x^2 - 2x + 3$ è lipschitziana sull'intervallo $[0, 3]$.

4 Le funzioni potenza.

Studiamo ora il comportamento delle funzioni potenza $f(x) = x^n$ con n numero naturale, su intervalli limitati.

Esercizio 12. Dimostrare che $f(x) = x^3$ è lipschitziana su $I = [-1, 1]$.

Al solito, prendiamo due punti $x_1, x_2 \in I$ e facciamo un confronto tra la variazione $|f(x_2) - f(x_1)|$ e $|x_2 - x_1|$. Come già nel caso della funzione $x \rightarrow x^2$ cerchiamo di scomporre $x_2^3 - x_1^3$ mettendo in evidenza il fattore $x_2 - x_1$ (il valore assoluto lo mettia-

mo alla fine. Ci viene in soccorso l'algebra che abbiamo studiato:
 $x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2)$.

Ora si tratta di fare una stima del fattore $|x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2|$ che sarà la costante di Lipschitz della funzione f su I . Vediamo una tecnica che dovremo imparare per stimare i valori assoluti di somme (per i prodotti è più facile perchè si ha un'uguaglianza):

$$|x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2| \leq |x_2^2| + |x_1||x_2| + |x_1^2|$$

L'ipotesi su x_1, x_2 ci dice che $|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1$ e ci permette di fare una stima pulita:

$$|x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2| \leq |x_2^2| + |x_1||x_2| + |x_1^2| \leq 1^2 + 1 \cdot 1 + 1^2 = 3$$

Conclusione: f è lipschitziana su I con una costante di Lipschitz che possiamo stimare in 3.

Esercizio 13. Dimostrare che $f(x) = x^4$ è lipschitziana su $I = [-1, 1]$.

Esercizio 14. Dimostrare che $f(x) = x^3 + x$ è lipschitziana su $I = [-1, 1]$.

Esercizio 15. Dimostrare che $f(x) = x^3 + x^2$ è lipschitziana su $I = [0, 2]$.

Esercizio 16. Dimostrare che $f(x) = x^3$ non è lipschitziana su $I = \mathbb{R}$.

Esercizio 17. Dimostrare che $f(x) = x^n$ è lipschitziana su $I = [-1, 1]$ con costante di Lipschitz $k = n$.

Suggerimento: usare la scomposizione

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Esercizio 18. Dimostrare che se f, g sono funzioni lipschitziane su un intervallo $I = [-1, 1]$ con la stessa costante di Lipschitz k allora anche $f + g$ è lipschitziana con costante k .