Proprietà di Lipschitz: le contrazioni

Mario Puppi

maggio 2019

1 Contrazioni.

Chiamiamo *contrazione* una funzione $x \mapsto g(x)$ di Lipschitz con costante $k < 1$ sull'intervallo I. Le contrazioni hanno un'applicazione importante nella risoluzione di equazioni.

Esempio 1. Le contrazioni più semplici sono le similitudini di rapporto k, con $0 < k < 1$, e tra queste ci sono le omotetie. Ad esempio, prendiamo l'omotetia $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$. Dimostriamo che g è una contrazione di rapporto $k = \frac{1}{2}$ sulla retta intera $I = \mathbb{R}$. Per ogni $x_1, x_2 \in I$ abbiamo

$$|g(x_2) - g(x_1) = |\frac{1}{2}(x_2 + 1) - \frac{1}{2}(x_1 + 1))| = \frac{1}{2}|x_2 - x_1|$$

Esempio 2. Data la funzione reale $g(x) = \sqrt{x + 2} + 1$

- Dimostrare che g è una contrazione su $[0, 4]$ di rapporto $k \leq \frac{1}{2}$

  Sia $I = [0, 4]$, dobbiamo provare che se due numeri reali x_1, x_2 soddisfano la premessa:

  (Hy)
  $$x_1, x_2 \in I$$

  allora soddisfano la conclusione:

  (Th)
  $$|g(x_1) - g(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$$

  dove K è il *fattore di dilatazione massima* di g. Se $K < 1$ allora avremo provato che g è una contrazione.

Fase 1. In questa fase ci concentriamo sulla quantità $g(x_1) - g(x_2)$ al fine di evidenziarne il fattore $x_1 - x_2$. Con un pò di mestiere scriveremo:

$$
\begin{aligned}
g(x_1)-g(x_2) &= (\sqrt{x_1+2}+1)-(\sqrt{x_2+2}+1) = \sqrt{x_1+2}-\sqrt{x_2+2} \\
&= (\sqrt{x_1+2}-\sqrt{x_2+2})\frac{\sqrt{x_1+2}+\sqrt{x_2+2}}{\sqrt{x_1+2}+\sqrt{x_2+2}} \\
&= ((x_1+2)-(x_2+2))\frac{1}{\sqrt{x_1+2}+\sqrt{x_2+2}} \\
&= (x_1-x_2)\frac{1}{\sqrt{x_1+2}+\sqrt{x_2+2}}
\end{aligned}
$$

Fase 2. In questa fase cerchiamo di trovare una limitazione superiore per la quantità $\frac{1}{\sqrt{x_1+2}+\sqrt{x_2+2}}$, che è il rapporto tra la variazione $g(x_1) - g(x_2)$ e la variazione $x_1 - x_2$. Useremo il metodo di sintesi che è in un certo senso duale del metodo di analisi con cui risolviamo equazioni e disequazioni. Procediamo per piccoli passi, partendo dalla premessa (Hy):

$$0 \le x_1 \le 4, \quad 0 \le x_2 \le 4$$

applichiamo la funzione crescente $x \mapsto x + 2$:

$$2 \le x_1 + 2 \le 6, \quad 2 \le x_2 + 2 \le 6$$

applichiamo la funzione crescente $x \mapsto \sqrt{x}$:

$$\sqrt{2} \le \sqrt{x_1+2} \le \sqrt{6}, \quad \sqrt{2} \le \sqrt{x_2+2} \le \sqrt{6}$$

sommiamo le due disuguaglianze:

$$\sqrt{2}+\sqrt{2} \le \sqrt{x_1+2}+\sqrt{x_2+2} \le \sqrt{6}+\sqrt{6}$$

applichiamo la funzione reciproco che è decrescente sulla semiretta dei numeri reali positivi:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \le \frac{1}{\sqrt{x_1+2}+\sqrt{x_2+2}} \le \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

Siamo riusciti a dimostrare che la quantità $\frac{1}{\sqrt{x_1+2}+\sqrt{x_2+2}}$ è limitata su I e un limite superiore è $K = \frac{1}{2\sqrt{6}}$. Non ci interessa il limite inferiore $\frac{1}{\sqrt{x_1+2}}$ e si sarebbe potuta tralasciare una disuguaglianza. La funzione g è quindi lipschitziana su I. Inoltre, siccome $K < 1$, possiamo dire che g è una contrazione.

2 Contrazioni e risoluzione di equazioni.

Esempio 3. Riprendiamo l'omotetia $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$. E' noto che l'equazione $g(x) = x$ ha un'unica soluzione u. Per approssimare u useremo un metodo iterativo che consiste nell'applicare ripetutamente la funzione g. Quello che serve è un punto di partenza, un'informazione su u per quanto grossolana, ad esempio supponiamo di sapere che $-5 \leq u \leq 11$.

- Possiamo applicare g per dedurre da $-5 \leq u \leq 11$ una nuova informazione su u, data da $g(-5) \leq g(u) \leq g(11)$. Infatti, g trasforma il segmento di estremi $-5, 11$ nel segmento di estremi $g(-5) = -\frac{3}{2}, g(11) = \frac{13}{2}$.

- L'informazione $g(-5) \leq g(u) \leq g(11)$ si può riscrivere $-\frac{3}{2} \leq u \leq \frac{13}{2}$ perchè $g(u) = u$. Se misuriamo la precisione usando la lunghezza dell'intervallo, vediamo che l'applicazione di g ha migliorato l'informazione. Infatti, la lunghezza della nuova informazione $-\frac{3}{2} \leq u \leq \frac{13}{2}$ è la metà della lunghezza dell'informazione iniziale $-5 \leq u \leq 11$.

- Applichiamo ora g all'informazione $\frac{-3}{2} \leq u \leq \frac{13}{2}$ per dedurne la nuova informazione: $\frac{1}{4} \leq u \leq \frac{17}{4}$. Di nuovo, la lunghezza dell'intervallo, che ora è $\frac{16}{4}$, è stata dimezzata da g che è una similitudine di rapporto $\frac{1}{2}$.

- Se applichiamo ancora g otteniamo poi $\frac{9}{8} \leq u \leq \frac{25}{8}$, e la lunghezza dell'intervallo è dimezzata ulteriormente: $\frac{16}{8}$.

- Ancora un'iterazione ed abbiamo $\frac{25}{16} \leq u \leq \frac{41}{16}$. Dopo 4 applicazioni di g l'approssimazione iniziale $-5 \leq u \leq 11$ è stata migliorata riducendo da 16 a 1 la lunghezza dell'intervallo che contiene u.

L'esempio ci suggerisce che se abbiamo una funzione g ed un intervallo I_0 che soddisfano le condizioni seguenti:

- g è una contrazione su I_0 di rapporto $k < 1$

- l'intervallo I_0 contiene una soluzione u di $g(x) = x$

Allora possiamo determinare una successione I_n di intervalli contenenti u, di lunghezza decrescente. La lunghezza di I_n è al più quella di I_0 moltiplicata per k^n.

Se l'intervallo iniziale I_0 ha lunghezza L_0 e vogliamo determinare u con un errore non superiore a ϵ allora basterà prendere l'intervallo I_n con n abbastanza grande da soddisfare la condizione

$$k^n L_0 \leq \epsilon$$

Esercizio 1. Data la funzione reale $g(x) = x(1 - x)$

- Dimostrare che g è una funzione di Lipschitz su $[0, 1]$ di rapporto $k = 1$
- Sia u soluzione di $g(x) = x$ tale che $0 \leq u \leq 0.5$. Usare g per dedurne un'approssimazione di u con un'intervallo di lunghezza inferiore a 0.1.
- Trova la più piccola costante di Lipschitz di g sull'intervallo [0, 0.5].

Esercizio 2. Data l'equazione $x^2 = 2x + 1$

- DImostrare che ha una soluzione u nell'intervallo $I = [1.5, 3]$
- Dimostrare che $g(x) = 2 + \frac{1}{x}$ è una contrazione su I
- Usare g per approssimare u con un errore inferiore a 0.1

Esercizio 3. Data la funzione reale $g(x) = \sqrt{x + 1}$

- Dimostrare che g è una contrazione su $[0, 2]$ di rapporto $k \leq \frac{1}{2}$
- Sia u soluzione di $g(x) = x$ tale che $0 \leq u \leq 2$. Usare g per dedurne un'approssimazione di u con un'intervallo di lunghezza inferiore a 0.1.

Esercizio 4. Data la funzione reale $g(x) = \sqrt{x + 2} + 1$

- Dimostrare che g è una contrazione su $[0, 4]$ di rapporto $k \leq \frac{1}{2}$
- Sia u soluzione di $g(x) = x$ tale che $0 \leq u \leq 4$. Usare g per dedurne un'approssimazione di u con un'intervallo di lunghezza inferiore a 0.1.

- Usare g per dedurne un'approssimazione di u con un'intervallo di lunghezza inferiore a 0.01.

Esercizio 5. Data la funzione reale $g(x) = \sqrt[3]{x+1} + 1$

- Dimostrare che g è una contrazione su $[0, 4]$ di rapporto $k \leq \frac{1}{3}$
- Sia u soluzione di $x^3 - 2x - 5 = 0$ tale che $0 \leq u \leq 4$. Dimostrare che u è soluzione di $g(x) = x$.
- Usare g per dedurne un'approssimazione di u con un'intervallo di lunghezza inferiore a 0.1.
- Usare g per dedurne un'approssimazione di u con un'intervallo di lunghezza inferiore a 0.01.

Esercizio 6. L'equazione $x^3 - 3x + 1 = 0$ ha tre soluzioni reali, una delle quali è un numero u tale che $1 \leq u \leq 2$. Quali tra le seguenti funzioni g è una contrazione su un intervallo contenente u che può essere usata per approssimare u?

- $g(x) = \frac{x^3+1}{3}$
- $g(x) = x^3 - 2x + 1$
- $g(x) = \frac{3x-1}{x^2}$
- $g(x) = \sqrt[3]{3x-1}$
- $g(x) = \sqrt{3 - \frac{1}{x}}$