Proprietà di Lipschitz: esercizi

Mario Puppi

maggio 2019

Esercizio 1. Data la funzione reale $g(x) = \frac{1}{3}x^4$

- Dimostrare che g è una funzione di Lipschitz su $I = [0, a]$ dove $a > 0$ è fissato (ma non noto).
- Determinare $a > 0$ in modo che g sia una contrazione su $[0, a]$

Esercizio 2. Si consideri la funzione $g(x) = x^2 + x$

- Dimostrare che g è una funzione di Lipschitz su $I = [-1, 1]$.
- Dimostrare che g non è una funzione di Lipschitz su $I = \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Data la funzione reale $g(x) = \sqrt{2x + 1}$

- Dimostrare che g è lipschitziana su $[0, 3]$
- Dimostrare che g è una contrazione su $[1, 3]$
- Usare g per approssimare la soluzione $u \in [1, 3]$ di $x^2 = 2x+1$ con un intervallo di ampiezza inferiore a 0,01

Esercizio 4. Si vuole risolvere l'equazione $x^3 = 3$ applicando il metodo del punto fisso sull'intervallo [1, 2] alla funzione $g(x) = 3\frac{1}{x^2}$ oppure alla funzione $h(x) = \sqrt{\frac{3}{x}}$

- Dimostrare che g è una funzione di Lipschitz su [1, 2]
- Dimostrare che h è una funzione di Lipschitz su [1, 2]

- Spiegare perchè una delle due funzioni può essere usata per risolvere l'equazione $x^3 = 3$ con il metodo del punto fisso.
- Usare il metodo del punto fisso per approssimare la soluzione $u \in [1, 2]$ di $x^3 = 3$ con due cifre decimali esatte.

Esercizio 5. Data la funzione reale $g(x) = \frac{1}{2}x^2$

- Dimostrare che g è una funzione di Lipschitz su $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
- Spiegare perchè g è una contrazione.
- Usare la successione x_n definita da $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_n = g(x_{n-1})$ se $n > 0$ per approssimare la soluzione di $g(x) = x$ che appartiene a I con una precisione di $\frac{1}{100}$
- Trova il minimo valore di n tale che $|x_n| < 10^{-2}$.

Esercizio 6. Data la funzione reale $g(x) = \frac{2}{3}x^3$

- Dimostrare che g è una funzione di Lipschitz su $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
- Spiegare perchè g è una contrazione.
- Usare la successione x_n definita da $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_n = g(x_{n-1})$ se $n > 0$ per approssimare la soluzione di $g(x) = x$ che appartiene a I con una precisione di $\frac{1}{100}$
- Trovare per quale valore di n si ha $|x_n| < 10^{-2}$.

Esercizio 7. Si consideri la funzione $g(x) = \cos x$

- Dimostrare che g è una funzione di Lipschitz su $I = [-1, 1]$. Sugg. usare le formule di prostaferesi e la disuguaglianza $|\sin x| \le |x|$ per ogni $x \in I$

$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$

- Usare il metodo del punto fisso per approssimare una soluzione dell'equazione $\cos x = x$ con un errore inferiore a 10^{-2}.

Esercizio 8. Data la funzione reale $g(x) = \sqrt{x + 2} + 1$

- Dimostrare che g è una contrazione su $[0, 4]$ di rapporto $k \leq \frac{1}{2}$
- Spiegare come si può dedurne che esiste una soluzione u di $g(x) = x$ tale che $0 \leq u \leq 4$.
- Usare g per dedurne un'approssimazione di u con un'intervallo di lunghezza inferiore a 0.01.