Modelli per contare.

Mario Puppi, Valentina Novello

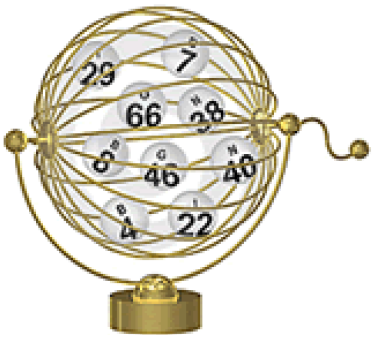
2018-2019

1. Struttura del prodotto

Un metodo naturale per contare un insieme consiste nel dargli una struttura. Il primo esempio che vediamo è la struttura prodotto. Grosso modo possiamo dire che le strutture fondamentali per i modelli combinatori corrispondono alle operazioni dell'aritmetica. In effetti, la scoperta di strutture fu un passo decisivo nello sviluppo dell'abilità di contare nella storia del pensiero umano. La struttura prodotto corrisponde al prodotto dell'aritmetica. In generale nel problema del contare gl insiemi, che sono privi di struttura, emerge l'idea di usare delle forme, con cui si possono costruire tipi di dati per costituire nuovi insiemi da insiemi più semplici.

Ad ogni particolare tipo di dati possiamo associare una 'regola aritmetica' utile per contare gli insiemi che sono di quel particolare tipo. E' questo il modo per ricavare le leggi del contare. Per contare grandi insiemi di oggetti è conveniente dare loro una struttura e il prodotto è una delle prime strutture scoperte ed usate in virtù della sua efficienza come soluzione del problema di contare

2. Disposizioni



1. L'urna In un'urna ci sono n palline distinte. Conoscendo il valore di n, una persona calcola che il numero delle terne ordinate di palline che si potrebbero formare, estraendo dall'urna 3 palline una alla volta senza restituzione, è 11 100.

- E' esatto? Spiega perchè.

La risposta è negativa. Infatti, il numero di terne è dato da $f(n) = n(n-1)(n-2)$, con n numero intero. La funzione f assume i valori $f(23) = 10626$ e $f(24) = 12144$ ed è una funzione crescente. Ne segue che non esiste n intero tale che $f(n) = 11100$.

2. Numeri con 4 cifre. Quanti sono i numeri di 4 cifre nella cui scrittura appaiono almeno tre cifre distinte?

La prima cifra deve essere diversa da 0. Quindi ci possiamo restringere a $9 \cdot 10^3$ numeri con 4 cifre. Contiamo quanti sono quelli che non hanno almeno tre cifre distinte e li sottraiamo da 9000 per ottenere 8424.

3. Struttura della somma

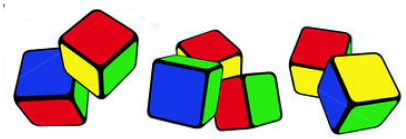
Una struttura fondamentale e familiare è la somma. Ad esempio, se si vuole calcolare quanti sono gli alunni iscritti ad una scuola si può sfruttare il fatto che l'insieme da contare è una 'somma di classi', cioè un'unione di insiemi a due a due disgiunti. Conoscere il numero di studenti di ciascuna classe è sufficiente per contare il numero di studenti della scuola. La legge di addizione corrisponde alla struttura somma. Supponiamo che un insieme A sia la somma di due insiemi B e C, cioè $A = B \cup C$ e B, C siano insiemi disgiunti In tal caso, scriveremo $A = B + C$ ed in effetti il numero di elementi di A è esttamente la somma del numero degli elementi di B e del numero degli elementi di C.

4. Combinazioni.

3. Targhe automobilistiche. Le attuali targhe automobilistiche italiane sono del tipo $RL506BS$, cioè contengono quattro lettere e tre cifre nel centro. Quante sono le targhe in cui, leggendo da sinistra a destra, le 3 cifre sono in stretto ordine crescente e le 4 lettere in stretto ordine alfabetico ? Si supponga che le lettere usate siano 23 (siano escluse O, Q, I) e le cifre siano 10.

La risposta è $\binom{23}{4}\binom{10}{3} = 1062600$.

4. Cubi colorati Disponiamo di 10 colori differenti con cui vogliamo colorare dei cubi dipingendo le 6 facce con 6 colori distinti. In quanti modi diversi possiamo farlo?



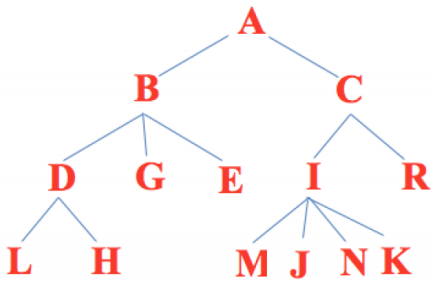
Posso scegliere i 6 colori per un cubo in $\binom{10}{6}$ modi. Per ciascuna scelta di colori, conto in quante maniere diverse posso dipingere un cubo. La risposta è $(10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2) : (4 \cdot 3 \cdot 2) = 6300$.

5. Alberi.

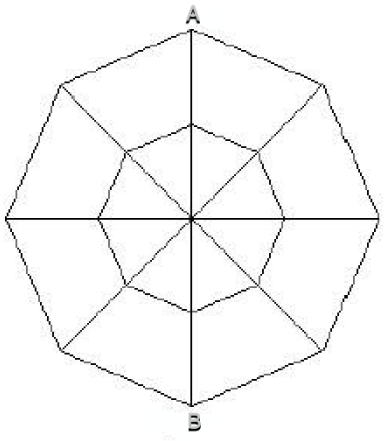
L'albero è la struttura naturale generata dall'operazione di somma e di prodotto. Un albero non è altro che un'espressione di somme di somme di ... somme di insiemi. Ad esempio, un insieme A tale che

$$A = B+C, B = D+G+E, C = I+R, I = M+J+N+K, D = L+H$$

si può rappresentare con l'albero seguente:



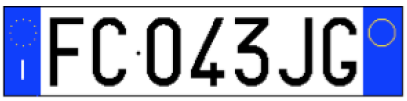
6. La ragnatela. Il disegno qui a fianco riproduce una ragnatela a forma ottagonale, di cui A è il punto più alto e B il punto più basso. Il ragno è posto in A. In quanti modi il ragno può andare da A a B scendendo sempre lungo i fili della ragnatela ?



Risposta: 35 percorsi.

6. Disposizioni.

7. Targhe italiane. Dal 1994 le targhe automobilistiche italiane hanno adottato un sistema di numerazione di tipo $L_1L_2-C_1C_2C_3-L_3L_4$, dove $C_1C_2C_3$ è una terna ordinata di cifre decimali 0, 1, 2, ..., 9, mentre $L_1L_2L_3L_4$ è una quaterna ordinata di lettere dell'alfabeto di 26 con esclusione di I, O, Q, U.



Quante sono le targhe ammissibili in Italia?

Risposta: $22^4 10^3 = 234\ 256\ 000$

8. Targhe francesi. Dal 2009 le targhe automobilistiche francesi hanno adottato un sistema di numerazione come quello italiano. Nel sistema francese è esclusa la terna di tre cifre 000 e le lettere ammesse sono tutte quelle dell'alfabeto di 26 tranne I, O, U. Quante sono le targhe possibili del sistema di numerazione francese?

Risposta: $23^4(10^3 - 1) = 279\ 561\ 159$