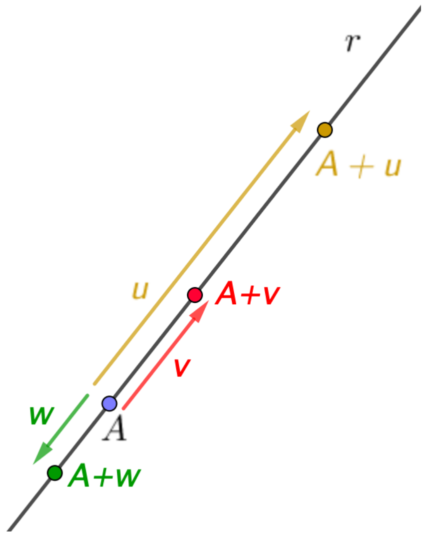
Geometria: dimensione 3

Mario Puppi

2018-19

1. Descrizione di rette nello spazio.



1. Direzione di una retta. Data una retta r nello spazio, vogliamo descriverne la *direzione*, ossia l'insieme D_r di tutti i vettori dello spazio che sono *paralleli* alla retta r.

Pensiamo ai vettori di D_r come alle traslazioni dello spazio che lasciano invariata la retta r. Precisamente,

preso un vettore v nello spazio, sarà $v \in D_r$ se e solo se

(1) per ogni punto $X \in r$ si ha $X + v \in r$

Per verificare che un vettore v appartenga alla direzione D_r non è necessario che esso soddisfi la condizione (1) per tutti i punti X della retta r. E' sufficiente che v verifichi il test (1) per un solo punto della retta r. Questa semplificazione ci fornisce un modo effettivo per sapere se un vettore v appartiene alla direzione di una retta r, basta fare il test della direzione su un solo punto $X = A$ della retta r:

(2) $v \in D_r$ se e solo se $A + v \in r$

Questo ci mette in grado di risolvere il

Problema 1. Sono dati punti $A = (1, 2, 1), B = (3, 2, 2)$ della retta r. Determinare la direzione della retta r, ossia l'insieme D_r di tutti i vettori dello spazio che sono *paralleli* a r.

Procediamo per passi, spezzando cioè il problema in una sequenza di problemini più semplici.

Troviamo un vettore della direzione D_r. Niente di più facile, avendo solo due dati A, B non ci vuole molto a trovare il vettore $v = B - A = (3, 2, 2) - (1, 2, 1) = (2, 0, 1)$ che trasla A su B, soddisfa quindi la condizione (2) e fa al caso nostro.

Il secondo passo è decisamente più concettuale. I vettori della direzione D_r sono in quantità infinita, ma hanno tutti la stessa direzione e due di loro sono sempre legati da un rapporto numerico. E' in qualche modo un assioma delle traslazioni di una retta che ci consente di affermare che, preso un vettore w

(3) $w \in D_r$ se e solo se esiste un numero reale k tale che $w = kv$

Ora si ha $kv = k(2,0,1) = (2k,0,k)$ e possiamo concludere che

$w \in D_r$ se e solo se esiste un numero k tale che $w = (2k,0,k)$

2. Descrizione parametrica di una retta. Vogliamo descrivere l'insieme dei punti di una retta r nello spazio, di cui conosciamo la direzione D_r e uno dei suoi punti A.

Continuiamo l'esercizio precedente, in cui conosciamo un punto $A = (1,2,1)$ e la direzione $D_r = \{(2k,0,k) : k \in R\}$ di una retta r.

L'insieme dei punti $P \in r$ può essere descritto come l'insieme di tutti i punti $A + u$ ottenuti al variare dei vettori $u \in D_r$:

$r = \{A + u : u \in D_r\} = \{(1,2,1) + (2k,0,k) : k \in R\}$

in conclusione:

$r = \{(1 + 2k, 2, 1 + k) : k \in R\}$

3. Equazioni parametriche di una retta. Scriviamo ora le *equazioni parametriche* di una retta r di cui conosciamo la descrizione parametrica $r = \{(1 + 2k, 2, 1 + k) : k \in R\}$

Un punto (x,y,z) dello spazio appartiene alla retta $r = \{(1 + 2k, 2, 1 + k) : k \in R\}$ se e solo se esiste un numero k tale che

$(x,y,z) = (1 + 2k, 2, 1 + k)$

che possiamo scrivere in forma di sistema di tre equazioni:

$$\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 2 \\ z = 1 + k \end{cases}$$

le *equazioni parametriche* della retta r, appunto.

2. Proiezione ortogonale su un piano.

Esercizio 1. Proiezione ortogonale di un punto su un piano. Data una retta r nello spazio, vogliamo descriverne la *direzione*, ossia l'insieme D_r di tutti i vettori dello spazio che sono *paralleli* alla retta r.

Pensiamo ai vettori di D_r come alle traslazioni dello spazio che lasciano invariata la retta r. Precisamente,

preso un vettore v nello spazio, sarà $v \in D_r$ se e solo se

(1) per ogni punto $X \in r$ si ha $X + v \in r$

Per verificare che un vettore v appartenga alla direzione D_r non è necessario che eso soddisfi la condizione (1) per tutti i punti X della retta r. E' sufficiente che v verifichi il test (1) per un solo punto della retta r. Questa semplificazione ci fornisce un modo effettivo per sapere se un vettore v appartiene alla direzione di una retta r, basta fare il test della direzione su un solo punto $X = A$ della retta r:

(2) $v \in D_r$ se e solo se $A + v \in r$

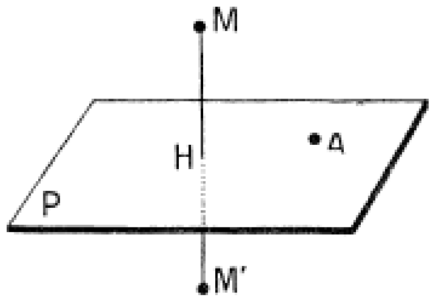
Questo ci mette in grado di risolvere il

Problema 1. Sono dati punti $A = (1, 2, 1), B = (3, 2, 2)$ della retta r. Determinare la direzione della retta r, ossia l'insieme D_r di tutti i vettori dello spazio che sono *paralleli* a r.

3. Simmetria rispetto ad un piano.

Trovare il simmetrico M' del punto M di coordinate (2,1,7) rispetto al piano P di equazione cartesiana $2x - 3y + z = 4$.

Che cosa ci serve? La figura mostra tutti gli ingredienti necessari per trovare M'. H è la proiezione ortogonale di M sul piano P, M' è il simmetrico di M rispetto a H. Il problema si riduce a trovare H. Il vettore $\overrightarrow{MH}$ sarà parallelo al vettore n_P normale al piano P. Scriviamo dunque $\{\overrightarrow{MH} = tn_P$, con t numero da determinare. Il punto H si ottiene applicando la traslazione $\{\overrightarrow{MH} = tn_P$ al punto M, dunque $H = M + tn_P = (2, 1, 7) + t(2, -3, 1) = (2 + 2t, 1 - 3t, 7 + t)$. La condizione $H \in P$ ci fornisce il valore di t come soluzione dell'equazione $2(2 + 2t) - 3(1 - 3t) + (7 + t) = 4$,



cioè $t = -\frac{2}{7}$. Possiamo determinare il simmetrico $M' = M + tn_P = M + 7n_P = (2,1,7) + 7(2,-3,1) = 16,-20,14)$.

Il secondo passo è decisamente più concettuale. I vettori della direzione D_r sono in quantità infinita, ma hanno tutti la stessa direzione e due di loro sono sempre legati da un rapporto numerico. E' in qualche modo un assioma delle traslazioni di una retta che ci consente di affermare che, preso un vettore w

(3) $w \in D_r$ se e solo se esiste un numero reale k tale che $w = kv$

Ora si ha $kv = k(2,0,1) = (2k,0,k)$ e possiamo concludere che

$w \in D_r$ se e solo se esiste un numero k tale che $w = (2k,0,k)$

2. Descrizione parametrica di una retta. Vogliamo descrivere l'insieme dei punti di una retta r nello spazio, di cui conosciamo la direzione D_r e uno dei suoi punti A.

Continuiamo l'esercizio precedente, in cui conosciamo un punto $A = (1,2,1)$ e la direzione $D_r = \{(2k,0,k) : k \in R\}$ di una retta r.

L'insieme dei punti $P \in r$ può essere descritto come l'insieme di tutti i punti $A + u$ ottenuti al variare dei vettori $u \in D_r$:

$r = \{A + u : u \in D_r\} = \{(1,2,1) + (2k,0,k) : k \in R\}$

in conclusione:

$r = \{(1+2k,2,1+k) : k \in R\}$

3. Equazioni parametriche di una retta. Scriviamo ora le *equazioni parametriche* di una retta r di cui conosciamo la descrizione parametrica $r = \{(1+2k,2,1+k) : k \in R\}$

Un punto $(x,y,z$ dello spazio appartiene alla retta $r = \{(1 + 2k,2,1+k) : k \in R\}$ se e solo se esiste un numero k tale che

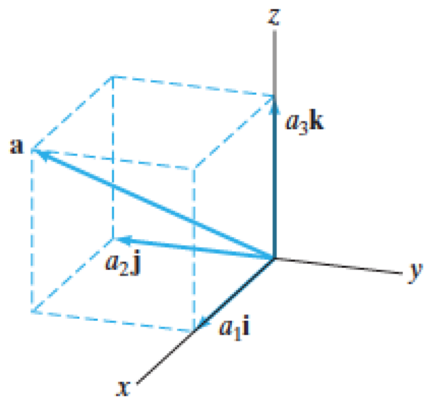
$(x,y,z) = (1+2k,2,1+k)$

che possiamo scrivere in forma di sistema di tre equazioni:

$$\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 2 \\ z = 1 + k \end{cases}$$

le *equazioni parametriche* della retta r, appunto.

4. Descrizione di piani nello spazio.



Consideriamo una scatola, con lati di lunghezza a_1, a_2, a_3, posta in un riferimento cartesiano.

Esercizio 1. Vogliamo descrivere l'insieme dei punti del piano α che passa per il vertice della scatola posto nell'origine e contiene sia la diagonale a che lo spigolo verticale passante per il vertice della scatola di coordinate (a_1, a_2, a_3).

1. Determiniamo due vettori della direzione D_α. Conosciamo tre punti del piano: $O = (0,0,0), A = (a_1, a_2, a_3), B = (a_1, a_2, 0)$. Ne deduciamo due traslazioni della direzione D_α: il vettore $u = (a_1, a_2, a_3)$ che trasla O in A e il vettore $v = (a_1, a_2, 0)$ che trasla O in B. I vettori della direzione D_α sono le combinazioni lineari di u, v:

$$D_\alpha = \{su + tv : s, t \in R\} = \{(sa_1 + ta_1, sa_2 + ta_2, sa_3) : s, t \in R\}$$

2. Descriviamo tutti i punti del piano α. Fissato il punto O del piano α, possiamo descrivere il piano α come l'insieme dei punti che si ottengono traslando O con i vettori della direzione D_α.

$$\alpha = \{O + (sa_1 + ta_1, sa_2 + ta_2, sa_3) : s, t \in R\} =$$
$$= \{(sa_1 + ta_1, sa_2 + ta_2, sa_3) : s, t \in R\}$$

5. Esercizi.

Esercizio 1. *Incidenza tra due rette.*

Sono date le rette r, s di equazioni:

$$\text{r: } \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 6 - t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

$$\text{s: } \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

- Dimostra che r e s non sono parallele.
- Trova l'intersezione $s \cap r$.
- Determina se r e s sono sghembe oppure incidenti.

- Determina, se esiste, un piano che contenga sia r che s.

Esercizio 2. *Relazioni tra un punto e un piano.*
Sono dati il punto $A = (2, 1, 0)$ e il piano α di equazione $x - y + 3z + 1 = 0$.

- Determina la retta r passante per A, ortogonale ad α.
- Determina il piano β passante per A e parallelo al piano α.
- Determina se esistono dei piani passanti per A e perpendicolari ad α.
- E' vero o falso che se un piano contiene la retta r allora esso è ortogonale al piano α?

Esercizio 3. *Relazioni metriche tra un punto e un piano.*
Dato il punto $A = (2, 0, 1)$ e il piano α di equazione x+y-2z+3=0

- Determina la direzione ortogonale (o normale) al piano α.
- Determina la proiezione ortogonale di A sul piano α.
- Determina il punto A' simmetrico di A rispetto al piano α.
- Determina la distanza tra A e A'.

Esercizio 4. *Due rette parallele.*
Sono date le rette r, s di equazioni:

r: $\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

s: $\begin{cases} x + z + 1 = 0 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$

- Dimostra che r e s sono parallele.
- Determina l'equazione cartesiana del piano α che contiene r e s.
- Determina se esiste un piano che contenga r e sia perpendicolare a s.
- Determina se esiste un piano che contenga s e sia perpendicolare a r.

6. Risoluzione degli esercizi 1, 2.

Esercizio 1. *Incidenza tra due rette.*

Sono date le rette r, s di equazioni:

$$\text{r: } \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 6 - t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

$$\text{s: } \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

- Dimostra che r e s non sono parallele.

  La direzione di r è $D_r = \{t(-2, -1, 1) : t \in \mathbf{R}\}$ che non ha tra i suoi elementi il vettore $(2, -3, 1)$, parallelo alla retta s.

  La prova dell'asserzione è che $t(-2, -1, 1) = (2, -3, 1)$ implica $t(-2) = 2, t(-1) = -3, t1 = 1$, da cui segue che $t = -1, t = 3, t = 1$, condizione che non può essere soddisfatta da alcun numero reale t.

- Trova l'intersezione $s \cap r$.

  Risolviamo il sistema, facendo attenzione a non fare l'errore logico di usare lo stesso simbolo t come parametro. Se $A = r \cap s$ allora esiste $t \in \mathbf{R}$ tale che $A = (2 - 2t, 6 - t, -1 + t)$ ed esiste $u \in \mathbf{R}$ tale che $A = (2u, 1 - 3u, 2 + u)$. Ne segue che $2 - 2t = 2u$, da cui $u = 1 - t$. Le altre due uguaglianze $6 - t = 1 - 3u, -1 + t = 2 + u$ si possono riscrivere come $6 - t = 1 - 3(1 - t), -1 + t = 2 + (1 - t)$, equivalenti entrambe a $t = 2$. Il sistema ammette come soluzione il punto $A = (2 - 4, 6 - 2, -1 + 2) = (-2, 4, 1)$.

- Le rette sono incidenti nel punto A.

  Siccome le rette r, s non sono sghembe esiste un piano α che le contiene. La sua direzione è data da $D_\alpha = D_r + D_s = \{t(-2, -1, 1) + u(2, -3, 1) : t, u \in \mathbf{R}\}$. Possiamo prendere un qualsiasi punto del piano, per esempio A stesso per generare i punti di α traslando A in tutti i modi possibili con vettori di D_α:

  $$\alpha = A + D_\alpha = \{A + t(-2, -1, 1) + u(2, -3, 1) : t, u \in \mathbf{R}\}$$

Esercizio 2. *Relazioni tra un punto e un piano.* Sono dati il punto $A = (2, 1, 0)$ e il piano α di equazione $x - y + 3z + 1 = 0$.

- Determina la retta r passante per A, ortogonale ad α.

  La retta r è data dall'insieme dei punti $A + v$ che si ottengono traslando A di un vettore $v \in D_r$. La direzione D_r, ortogonale al piano α, è data da tutti i vettori tn_α, $t \in \mathbf{R}$, paralleli al vettore $n_\alpha = (1, -1, 3)$ normale al piano α.

  Ne segue che $(x, y, z) \in r$ se e solo se $(x, y, z) = (2, 1, 0) + t(1, -1, 3) = (2+t, 1-t, 3t)$, da cui le equazioni parametriche di r:
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3t \end{cases}$$

- Determina il piano β passante per A e parallelo al piano α.

  Il piano β ha la stessa direzione di α, data da tutti i vettori ortogonali a n_α. Un punto $P = (x, y, z)$ appartiene a β se è della forma $P = A + u$, con u ortogonale a n_α, come dire che $P - A$ è ortogonale a n_α, ossia $(x-2, y-1, z-0)\cdot(1, -1, 3) = 0$. Ne segue l'equazione cartesiana del piano β:
$$(x - 2) + (-1)(y - 1) + 3z = 0$$

- Determina se esistono dei piani passanti per A e perpendicolari ad α.

  Un piano γ è perpendicolare al piano α se e solo se il suo vettore normale n_γ è ortogonale al vettore n_α. Ad esempio, il vettore $w = (1, 1, 0)$ è ortogonale a n_α. Ne segue che il piano che passa per A con vettore normale w è perpendicolare ad α.

7. Altri esercizi.

Esercizio 1. Dati i punti $A = (2, 0, 1), B = (1, -1, 3), C = (0, 1, -4)$

- Scrivi le equazioni parametriche del piano α passante per A, B e C.

- Scrivi l'equazione cartesiana del piano α.
- Scrivi l'equazione parametrica della retta r passante per A e perpendicolare al piano α.
- Scrivi l'equazione cartesiana di r.

Esercizio 2. Data la retta r di equazioni: $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

- Scrivi le equazioni parametriche di r.
- Scrivi l'equazione del piano α perpendicolare alla retta r passante per il punto $A = (1, 0, 1)$
- Determina se la retta r è contenuta nel piano β di equazione $x - y - z = 0$
- Determina l'intersezione della retta r con il piano γ di equazione $x + y = 1$
- Determina i punti di r che hanno distanza 2 dal piano γ

Esercizio 3. Data la retta s di equazioni: $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x - z = 1 \end{cases}$

- Scrivi l'equazione del piano α passante per l'origine e perpendicolare a s.
- Determina la proiezione ortogonale dell'origine sul piano α.
- Determina la distanza dell'origine dal piano α.
- Determina il punto simmetrico dell'origine rispetto al piano α.

Esercizio 4. Dati i punti $A = (2, 0, 2)$ e $B = (1, 3, 0)$

- Determina la direzione della retta r passante per A, B.
- Determina la direzione del piano α, ortogonale alla retta r, passante per il punto medio di A, B.

- Determina l'insieme di tutti i punti P che siano proiezioni ortogonali su α di punti della retta r.
- Determina la retta s simmetrica di r rispetto al piano α

Esercizio 5. Dati il punto $A = (1, 0, -1)$ e il piano α di equazione $2x + y - z = 2$

- Determina le equazioni parametriche della retta r passante per A e perpendicolare al piano α.
- Deduci le equazioni cartesiane di r.
- Determina l'equazione cartesiana del piano β passante per A, parallelo al piano α.
- Dimostra che il piano β contiene la retta passante per i punti A e $B = (2, 1, 2)$.

Esercizio 6. Dati i punti $C = (1, 0, 1), D = (1, 1, 0)$,

- determina le equazioni parametriche della retta r passante per C e D;
- determina i punti della retta r che hanno distanza $\sqrt{3}$ dal piano α di equazione $x + y - z = 2$.
- determina le equazioni parametriche della retta s, perpendicolare al piano α, passante per C;
- determina la proiezione ortogonale del punto D sul piano α.

Esercizio 7. Data la retta r di equazioni: $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$

- Scrivi le equazioni parametriche di r.
- Determina l'equazione cartesiana del piano α ortogonale a r, passante per il punto $A = (1, 0, 1)$
- Dimostra che la retta r è contenuta nel piano β di equazione $y = 0$
- Determina l'intersezione della retta r con il piano α

Esercizio 8. Dati il punto $A = (-2, 0, 1)$ e il piano β di equazione $x - 2y + z = 3$

- Determina la direzione ortogonale al piano β.
- Determina la proiezione ortogonale di A sul piano β.
- Determina il punto simmetrico di A rispetto al piano β.
- Determina la distanza del punto A dal piano β.

Esercizio 9. Dati il punto $A = (1, 0, 1)$ e il piano α di equazione $x + y - z = 1$

- Determina le equazioni parametriche della retta r passante per A e perpendicolare al piano α.
- Deduci le equazioni cartesiane di r.
- Determina l'equazione cartesiana del piano β passante per A, parallelo al piano α.
- Dimostra che il piano β contiene la retta passante per i punti A e $B = (2, 1, 3)$.

Esercizio 10. Data la retta r di equazioni: $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$

- Scrivi le equazioni parametriche di r.
- Determina le equazioni parametriche del piano α ortogonale a r, passante per il punto $A = (1, 0, 1)$
- Dimostra che la retta r è contenuta nel piano β di equazione $x - y + z = 0$
- Determina l'intersezione della retta r con il piano α

Esercizio 11. Dati i punti $C = (2, 0, 1), D = (1, 1, 0)$,

- determina le equazioni parametriche della retta r passante per C e D.
- Determina i punti della retta r che hanno distanza $\sqrt{3}$ dal piano α di equazione $x + y - z = 1$.

- Determina le equazioni parametriche della retta s, parallela a r, passante per C.

- Determina la proiezione ortogonale del punto D sul piano α.

Esercizio 12. Dati il punto $A = (1, 0, 2)$ e il piano β di equazione $x - y + 2z = 3$

- Determina la direzione ortogonale al piano β.

- Determina la proiezione ortogonale di A sul piano β.

- Determina il punto simmetrico di A rispetto al piano β.

- Determina la distanza del punto A dal piano β.

Esercizio 13. Dati il punto $A = (-1, 0, 1)$ e il piano α di equazione $x + y - z = 1$

- Determina le equazioni parametriche della retta r passante per A e perpendicolare al piano α.

- Deduci le equazioni cartesiane di r.

- Determina l'equazione cartesiana del piano β passante per A, parallelo al piano α.

- Dimostra che il piano β contiene la retta passante per i punti A e $B = (2, 1, 5)$.

Esercizio 14. Dati i punti $A = (-1, 0, 1), B = (1, -1, 0)$,

- determina le equazioni parametriche della retta r passante per A e B;

- determina i punti della retta r che hanno distanza $\sqrt{3}$ dal piano α di equazione $x - y - z = 1$.

- determina le equazioni parametriche della retta s, perpendicolare al piano α, passante per A;

- determina la proiezione ortogonale del punto A sul piano α.

Esercizio 15. Data la retta r di equazioni: $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$

- Scrivi le equazioni parametriche di r.
- Determina l'equazione cartesiana del piano α ortogonale a r, passante per il punto $A = (-1, 0, 1)$
- Dimostra che la retta r è contenuta nel piano β di equazione $x - 2y + z = 2$
- Determina l'intersezione della retta r con il piano α

Esercizio 16. Dati il punto $A = (-1, 0, 1)$ e il piano β di equazione $x - 2y + z = 3$

- Determina l'insieme dei vettori che sono ortogonali al piano β.
- Determina la proiezione ortogonale di A sul piano β.
- Determina il punto simmetrico di A rispetto al piano β.
- Determina la distanza del punto A dal piano β.

Esercizio 17. Dati il punto $A = (1, 0, -1)$ e il piano α di equazione $x - y - z = 1$

- determina le equazioni parametriche della retta r passante per A e perpendicolare al piano α
- deduci le equazioni cartesiane di r
- determina l'equazione cartesiana del piano β passante per A, parallelo al piano α
- dimostra che il piano β contiene la retta passante per A e per il punto $B = (2, 0, 0)$.

Esercizio 18. Dati i punti $A = (1, 0, 1), B = (-1, 1, 0)$,

- determina il piano α formato da tutti i punti equidistanti da A e B
- determina i punti del piano α che si trovano a distanza 1 sia da A che da B
- determina le equazioni parametriche della retta s passante per A, B

- determina la proiezione ortogonale del punto B sul piano α e dimostra che $B \in s$

Esercizio 19. Data la retta r di equazioni: $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$

- Scrivi le equazioni parametriche di r.
- Determina l'equazione cartesiana del piano α ortogonale a r, passante per il punto $A = (-1, 0, 1)$
- Dimostra che la retta r è contenuta nel piano β di equazione $x - 2y + z = 2$
- Determina l'intersezione della retta r con il piano α

Esercizio 20. Dati il punto $A = (-1, 0, 1)$ e il piano β di equazione $x - 2y + z = 3$

- Determina l'insieme dei vettori che sono ortogonali al piano β.
- Determina la proiezione ortogonale di A sul piano β.
- Determina il punto simmetrico di A rispetto al piano β.
- Determina la distanza del punto A dal piano β.