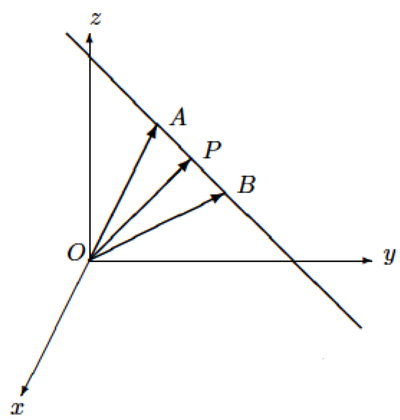
Geometria nello spazio

Valentina Novello

2018-2019

1. Retta per due punti



1.1 Equazioni parametriche della retta. Se A e B sono due punti distinti e r è la retta passante per A, B allora un punto P appartiene alla retta r se e solo se $P = A + t(B - A)$.

Di fatto, possiamo descrivere r come l'insieme di punti

$$r = \{A + t(B - A) : t \in \mathbf{R}\}$$

Assumiamo che $P = (x, y, z), A = (x_A, y_A, z_A), B = (x_B, y_B, z_B), C = (x_C, y_C, z_C)$ allora l'equazione sui punti: $P = A + t(B - A)$ si traduce in tre equazioni numeriche, dette le *equazioni parametriche* della retta r:

$$\begin{cases} x &= x_A + t(x_B - x_A) \\ y &= y_A + t(y_B - y_A) \\ z &= z_A + t(z_B - z_A) \end{cases} \tag{1}$$

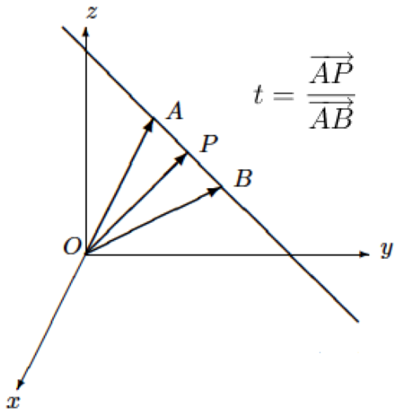
1.2. Formula del rapporto di Joachimsthal

Nelle equazioni parametriche (1), qual è il significato del parametro t? Ad ogni punto P della retta corrisponde un valore del parametro t, per cui si tratta di una biiezione dell'insieme dei numeri reali $\mathbf{R}$ e l'insieme dei punti della retta r.

- Al numero 0 corrisponde il punto $A + 0(B - A) = A$
- al numero 1 corrisponde il punto $A + 1(B - A) = B$
- al numero $\frac{1}{2}$ corrisponde il punto $A + \frac{1}{2}(B - A)$, *punto medio* del segmento AB.

In generale, possiamo dire che t ha un significato geometrico. L'equazione $P = A+t(B-A)$ ha come oggetti i punti, ma possiamo tradurla nel linguaggio dei vettori: $(P-A) = t(B-A)$, ossia

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$$



Vediamo così che il numero t è il rapporto tra due vettori che hanno la stessa direzione $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$. Il rapporto è $\frac{1}{2}$ proprio nel caso in cui P è il punto medio di AB, come dire che $\overrightarrow{AP}$ è la metà di $\overrightarrow{AB}$. In generale, abbiamo la formula del *rapporto di Joachimsthal*:

$$t = \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AB}}$$

Esercizio 1. Dati i punti A = (-4, 3, 1), B = (1, 1, 0), C = (2,0,2) D = (-1, -3, 2), E= (1, 4, 7), F= (-4, -3, 13), siano r la retta AB, s la retta CD, w la retta EF.

- Dimostrare che le rette r, s sono parallele
- Dimostrare che le rette r, w si intersecano nel punto $(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3})$

Esercizio 2. Dati i punti A = (5, 0, 7), B = (2, -3, 6), sia r la retta AB.

- Determinare il punto P della retta r tale che $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AB}$

2. Rette perpendicolari

Esercizio 3. Dati i punti A = (2, 9, 8), B = (6, 4, -2), C = (7, 15, 7), si considerino la retta r passante per A, B e la retta s passante per A, C.

- Dimostrare che la rette r e s sono perpendicolari
- Determinare un punto D tale che $ABCD$ sia un rettangolo.

3. Proiezione ortogonale su una retta

Dati due punti distinti A, B, sia r la retta passante per A, B. Preso un punto C allora

- esiste un unico punto P sulla retta r tale che $\overrightarrow{CP}$ sia ortogonale al vettore $\overrightarrow{AB}$
- possiamo scrivere la formula per P:

$$P = A + t\overrightarrow{AB}, \qquad t = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}$$

Infatti, $P \in r$ si traduce nell'uguaglianza $P = A + t\overrightarrow{AB}$ per qualche numero t.

Ora, se $P \in r$ è tale che $\overrightarrow{CP}$ sia ortogonale ad $\overrightarrow{AB}$ allora si ha

$$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

cioè

$$(P - C) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

vale a dire

$$(A + t\overrightarrow{AB} - C) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

ossia

$$(\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

che riscriviamo

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

che diventa

$$-\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

che risolviamo trovando

$$t = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}$$

4. Distanza di un punto da una retta

Dati due punti distinti A, B, sia r la retta passante per A, B. Preso un punto C vogliamo determinare la distanza di C dalla retta r.

- Sia P la proiezione ortogonale del punto C sulla retta r, per cui $\overrightarrow{CP}$ è ortogonale ad $\overrightarrow{AC}$
- se $P = A$ abbiamo che la distanza è data dal segmento CA
- altrimenti il triangolo CPA è un triangolo rettangolo
- Per ogni punto $X \in r$ si ha $CX \geq CP$, cioè P è il punto della retta r più vicino a C
- possiamo scrivere la formula per P:

$$P = A + t\overrightarrow{AB}, \qquad t = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}$$

- applichiamo il teorema di Pitagora:

$$\begin{aligned} CP^2 &= AC^2 - PA^2 \\ &= AC^2 - (t\overrightarrow{AB})^2 \\ &= AC^2 - t^2 AB^2 \\ &= AC^2 - \left(\frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}\right)^2 AB^2 \\ &= \frac{AC^2 AB^2 - (\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB})^2}{AB^2} \end{aligned}$$

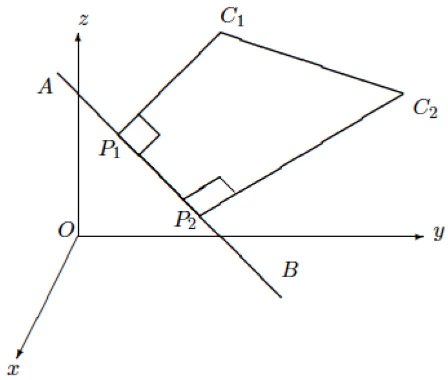
Abbiamo così la formula per determinare la distanza del punto C dalla retta AB:

$$CP = \frac{\sqrt{AC^2 AB^2 - (\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB})^2}}{AB}$$

Esercizio 4. Dati i punti $A = (1, 2, 1)$, $B = (2, -1, 3)$, $C = (7, 15, 7)$, si consideri la retta r passante per A, B

- Dimostra che il punto di r più vicino all'origine è $P = (\frac{17}{14}, \frac{19}{14}, \frac{20}{14})$
- Verifica che la distanza dell'origine dalla retta r è data da $\frac{5}{14}\sqrt{42}$

5. Proiezione di un segmento



Dati due punti distinti A, B, sia r la retta passante per A, B. Presi due punti C_1, C_2, siano P_1, P_2 le rispettive proiezioni orotgonali sulla retta r. Vogliamo determinare la relazione tra la lunghezza del segmento C_1C_2 e la lunghezza della sua proiezione ortogonale P_1P_2.

Cominciamo a scrivere:

- $P_1 = A + t_1\overrightarrow{AB}, \quad P_2 = A + t_2\overrightarrow{AB}$

da cui otteniamo:

- $t_1 = \frac{\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{AB}}{AB^2}, \quad t_2 = \frac{\overrightarrow{AC_2}\cdot\overrightarrow{AB}}{AB^2}$

e di conseguenza:

- $\overrightarrow{P_1P_2} = (A + t_2\overrightarrow{AB}) - (A + t_1\overrightarrow{AB}) = (t_2 - t_1)\overrightarrow{AB}$

da cui

- $P_1P_2 = |t_2 - t_1|AB = |\frac{\overrightarrow{AC_2}\cdot\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}} - |\frac{\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}|AB = |\frac{\overrightarrow{C_1C_2}\cdot\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}|AB$

Ne deduciamo così:

- $P_1P_2 = \overrightarrow{C_1C_2} \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$