

Progressioni Aritmetiche

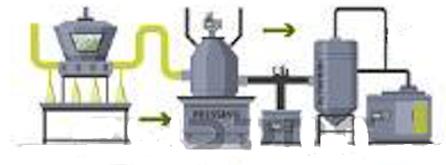
Mario Puppi & Valentina Novello

novembre 2019

Proponiamo fenomeni reali molto diversi tra loro, ma legati da un'insospettabile trama: possono essere descritti con modelli lineari o progressioni aritmetiche.

1. Il piano di ammortamento.

Il proprietario di un frantoio di Trevi, in Umbria, ha acquistato nel luglio 2004 un impianto per la lavorazione delle olive al costo di 250.000€. Secondo la normativa fiscale il coefficiente di ammortamento annuale è pari al 10%. In altre parole, ogni anno può essere portato in detrazione $\frac{1}{10}$ del costo dell'attrezzatura. Il proprietario si rivolge al suo commercialista per ottenere il piano di ammortamento, cioè il valore residuo anno per anno.



Costruzione del modello.

- Assumiamo l'anno di acquisto come anno zero ed indichiamo con R_n il valore residuo dopo n anni dall'anno di acquisto.
- Portando in detrazione la cifra annua di 25.000€, pari al 10% del costo di 250.000€, si ottiene il piano di ammortamento (in migliaia di euro il valore residuo):

anno	0	1	2	3	...	n
valore residuo	250	225	200	175	...	R_n

- Il modello è di tipo iterativo: il residuo R_n nell'anno n si esprime in funzione del residuo dell'anno precedente R_{n-1}

$$R_n = R_{n-1} - 25$$

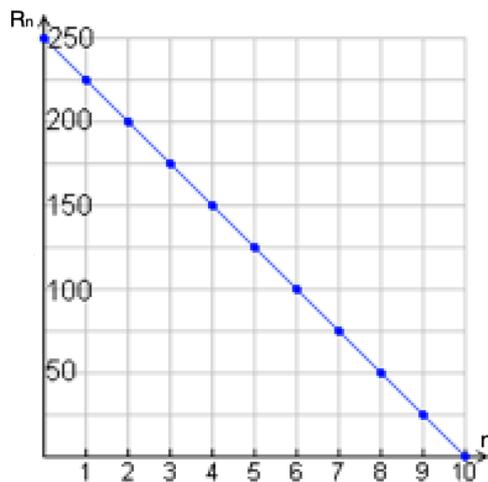
- Sfruttando l'iterazione, dedurre una formula chiusa per R_n .

- Sia $d = 25$ la quota di ammortamento annua, si ha
 $R_0 = 250, R_1 = 250 - d, R_2 = 250 - d - d, R_3 = 250 - 3d, \dots$

In generale, per $n = 1, \dots, 10$, si ha

$$R_n = R_0 - nd = 250 - 25n$$

- La sequenza R_n descrive l'evoluzione del valore residuo: essa ha un passo costante, la differenza fra due termini consecutivi $R_n - R_{n+1} = d = 25$. Pertanto R_n è una progressione aritmetica di ragione $d = 25$.
- **Grafico cartesiano.** Riportando le coppie (n, R_n) in un sistema di riferimento cartesiano si ottengono i punti di una retta.



- **Esercizio.** Trovare l'equazione $y = mx + q$ della retta. Quali sono le due costanti m, q del modello cartesiano?

2. Foreste in crescita.

“ Finalmente una buona notizia che dimostrerebbe come il processo di deforestazione non sia necessariamente una via senza ritorno. In Costa Rica le foreste stanno ricrescendo, lentamente, ma in maniera costante dal 1983 dove si segnalava una percentuale del 26%, che nel 2000 è riuscita ad aumentare fino al 45% per poi raggiungere il 52% nel 2005”.

Fonte: Venerdì di Repubblica, 19.4.2008

Costruzione del modello.

- Per avere una idea dell'andamento del fenomeno valutiamo il tasso di crescita negli intervalli 1983-2000 e 2000-2005.
- Tra il 1983 e il 2000, si ha il tasso di crescita $\frac{45-26}{17} = 1.12$
- Tra il 2000 e il 2005, si ha il tasso di crescita $\frac{52-45}{5} = 1.40$

intervallo di tempo	1983-2000	2000-2005
tasso di crescita	1.12	1.40

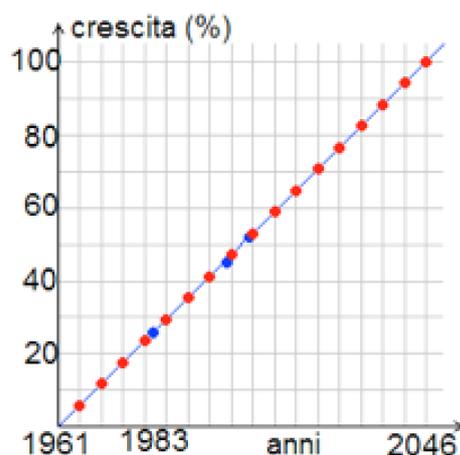
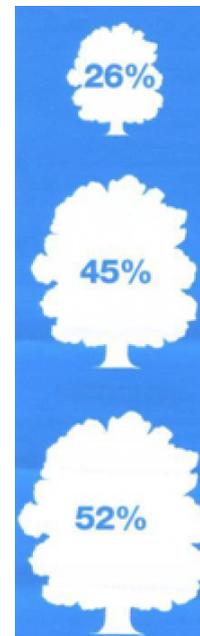
Il fenomeno presenta un andamento che può essere ritenuto in prima approssimazione lineare.

- Dimostrare che il tasso medio di crescita tra il 1983 e il 2005 è 1.18
- Assumere come modello del fenomeno la funzione

$$f(x) = 1.18(x - 1983) + 26$$

$f(x)$ rappresenta la crescita delle foreste nell'anno x

- determinare l'anno in cui la crescita è nulla secondo il modello
- si trova che l'anno è il 1961
- Con una traslazione $x \mapsto x - 1961$ si può riscrivere la funzione di crescita nella forma $y = 1.18x$
- Fare il grafico cartesiano della successione definita da $c_0 = f(0) = 0, c_1 = f(1 \cdot 5) = 5.90, c_2 = f(2 \cdot 5), \dots, c_n = f(n \cdot 5)$



- $c_n = f(n \cdot 5) = 1.18 \cdot 5n$
- determinare l'anno in cui la superficie delle foreste in Costa Rica sarà raddoppiata rispetto a quella inizialmente nulla del 1961 [risposta: 85 anni dal 1961, cioè nell'anno 2046]

3. Il DVD diventa BLU.

I produttori ne sono certi: nel 2009 decollerà definitivamente anche in Italia la rivoluzione del Blu-Ray. Cioè quell'evoluzione del dvd che permette la proiezione di film in alta definizione. Gli italiani hanno comprato 390 mila film di questo tipo nel 2008, contro i 100 mila del 2007. Boom anche per i lettori Blu-Ray: il numero di quelli venduti, in Italia, è aumentato del 750 per cento nel 2008. **Fonte: Il Venerdì di Repubblica, 5.3.2009**

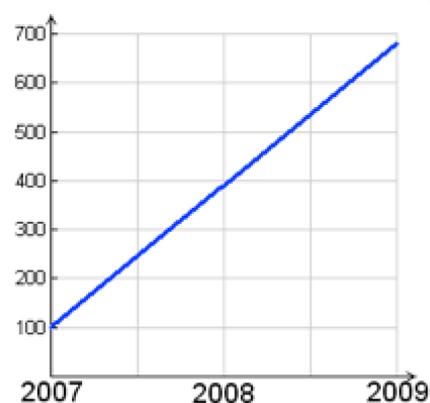


Costruzione del modello. Assunto che il trend continui nello stesso modo, fare un modello lineare delle vendite di blu-ray nel tempo.

- Adottiamo come variabili del modello il tempo n (in anni) e la quantità V_n di blu-ray venduti (in migliaia). Fissiamo l'origine dei tempi (anno zero) nel 2007.
- Facciamo una tabella dei dati relativi alle due variabili:

anno	2007	2008
Blu-Ray venduti	100	390

- Il valore iniziale della progressione aritmetica V_n è dato dalle vendite nell'anno 2007: $V_0 = 100$
- Qual è la previsione sulle vendite di film in formato Blu-Ray in Italia nel 2019 (in migliaia di euro)?
- La ragione della progressione aritmetica V_n è data dall'incremento nel primo anno: $d = V_1 - V_0 = 390 - 100 = 290$
- La previsione del modello lineare per l'anno 2019 è data dal valore V_{12} assunto nell'anno $n = 2019 - 2007 = 12$, cioè $V_{12} = 100 + 12 \cdot 290 = 3580$



- **Verifica del modello.** Nel 2016 sono stati venduti 3,8 milioni di blu-ray [Fonte: www.lagazzettadisney.it, 13 luglio 2017] cioè 3800 migliaia. La crescita dei blu-ray è stata superiore rispetto a quella prevista dal modello lineare.

4. Danza aerobica.

Gli esperti raccomandano che durante gli esercizi di aerobica il cuore non si affatichi troppo e hanno proposto la tabella seguente in cui l'età n del praticante è in relazione con il numero massimo di battiti al minuto B_n del cuore.

età	battiti
20	170
40	153
50	144,5
60	136
70	127,5



- Dimostra che B_n è una progressione aritmetica
- Qual è il numero massimo di battiti consigliato per una persona di 30 anni?
- Qual è l'intervallo di età ideale per una persona che abbia 130 battiti?
- Determinare la formula chiusa per B_n in funzione di n .

