Modelli quadratici

Mario Puppi & Valentina Novello

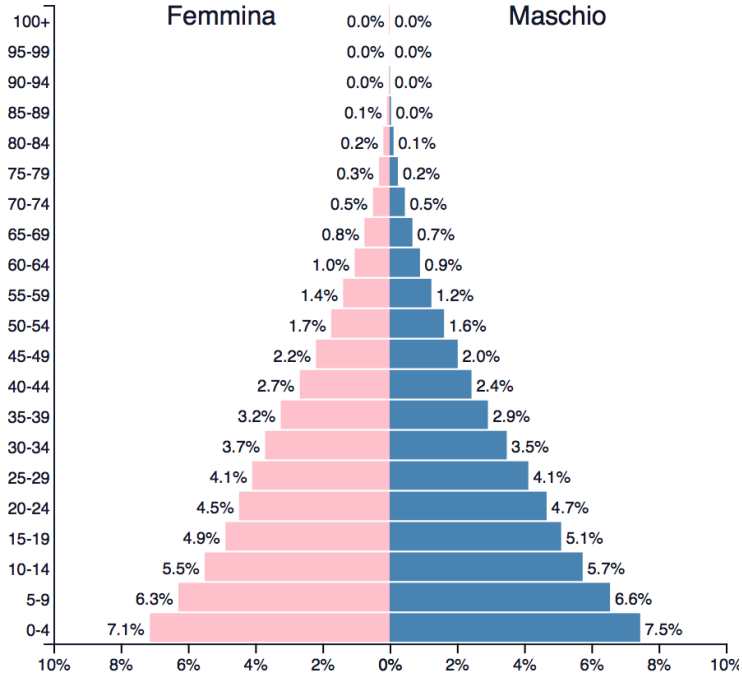
gennaio 2019

1. La piramide demografica del Ghana

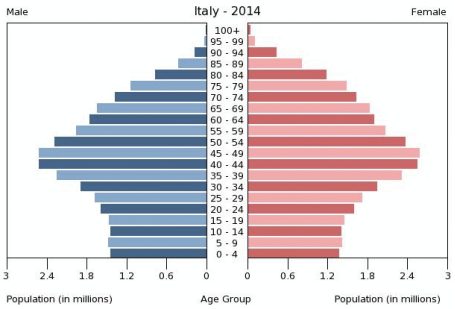
La *piramide demografica* descrive la distribuzione della popolazione in un paese, per classi di età, distinguendo tra maschi e femmine.

E' uno strumento usato dagli economisti di una nazione per fare previsioni sulla spesa previdenziale.

La piramide demografica del Ghana nel 2016 è data da



Il Ghana è una nazione dell'Africa occidentale.



Piramide della popolazione italiana 2014. (Dati ISTAT).

1. Descrivere la distribuzione della popolazione del Ghana in classi di età con un modello quadratico $P = aE^2 + bE + c$ in cui E rappresenta la classe di età, P è la percentuale di popolazione.

2. Fare una tabella dei dati della piramide demografica del Ghana.

3. Fare un grafico cartesiano di P in funzione di E

4. Usare un modello della forma $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ e spiegare il significato dei parametri a, x_0, y_0.

2. Popolazione dello Zambia

Su Wikipedia sono disponibili i dati della popolazione dallo Zambia dal 1950 al 2010.

1. Usare Geogebra per fare un grafico cartesiano dei dati. Lasciare visibili solo i dati dal 1950 al 1995 e nascondere gli altri dati

Anno	Abitanti
1950	2316.950
1955	2643.906
1960	3049.586
1965	3559.687
1970	4185.378
1975	4983.017
1980	5929.497
1985	7017.292
1990	8143.142
1995	9253.527

2. Descrivere la crescita della popolazione dal 1950 al 1995 usando una funzione quadratica $P(t) = at^2 + bt + c$

3. Descrivere la crescita della popolazione dal 1950 al 1995 con una funzione quadratica $Q(t) = a(t - t_0)^2 + Q_0$

4. Studiare il siginificato dei parametri a, t_0, Q_0 del modello

5. Usare il modello per fare previsioni nel "futuro" dal 2000 al 2010.

6. Rendere visibili i dati nascosti nel grafico di Geogebra.

Anno	Abitanti
2000	10585.220
2005	12043.591
2010	13917.439

3. Coltivazione di frumento in USA

Il seguente modello descrive l'estensione (in migliaia di acri) delle coltivazioni di frumento degli Stati Uniti

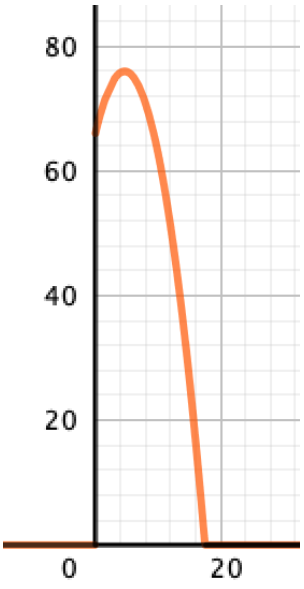
[Fonte: **U.S. Department of Agriculture**]

Nell'anno t, a partire da $t = 0$ che corrisponde al 1990, l'estensione della coltivazione è data da

$$A(t) = -0.46t^2 + 4.28t + 66$$

Sulla base del modello, rispondi ai quesiti seguenti:

- In quale anno si è avuta la massima estensione di coltivazioni a frumento?
- Quanto è stata (approssimativamente) tale estensione?
- In quale anno si è raggiunta la quota di 50 mila acri?
- Determinare l'intervallo di tempo più grande in cui è applicabile il modello quadratico $A(t)$



- La funzione quadratica $A(t)$ assume il valore massimo quando $t = -\frac{b}{2a} = -\frac{4.28}{-0.92} = 4.65$ che corrisponde all'anno 1995.
- In tale anno si ha la massima estensione $A(-\frac{b}{2a}) = c - \frac{b^2}{4a} = 66 + \frac{4.28^2}{1.84} = 76$, pari a circa 76 mila acri.
- La soluzione positiva dell'equazione $A(t) = 50$ è un numero compreso tra 12 e 13, che corrsiponde all'anno 2003.
- $A(t) > 0$ per $0 \leq t \leq 17$, mentre $A(18) < 0$. Ciò significa che il modello può essere valido non oltre l'intervallo $0 \leq t \leq 17$.

4. Concentrazione di CO_2 nell'aria

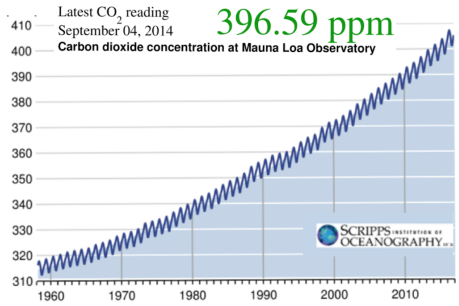
Il Programma CO_2 della Scripps fu guidato da Charles David Keeling dall'inizio del progetto, nel 1956, fino alla sua morte nel 2005.

Il chimico Charles David Keeling ha registrato la concentrazione di CO_2 nell'aria dal 1960 al 2005, dall'Osservatorio di Mauna Loa (Hawaii), con una frequenza settimanale.

La tabella seguente fornisce le medie annuali dei dati di Keeling:

anno	CO_2 media
1960	316.91
1965	320.04
1970	325.68
1975	331.08
1980	338.68
1985	345.87
1990	354.16
1995	360.63
2000	369.40
2005	379.78

Il grafico dei dati è ora noto come la Curva di Keeling



1. Determinare un modello quadratico della relazione tra la media annuale della concentrazione di CO_2 nell'aria, misurata in ppm (parti per milione) e il tempo misurato in anni.

2. Verificare il modello quadratico sui dati ottenuti dal team di Scripps, guidato da Ralph Keeling, figlio di C. D. Keeling, nel periodo di tempo che va dal dal 2007 al 2010:

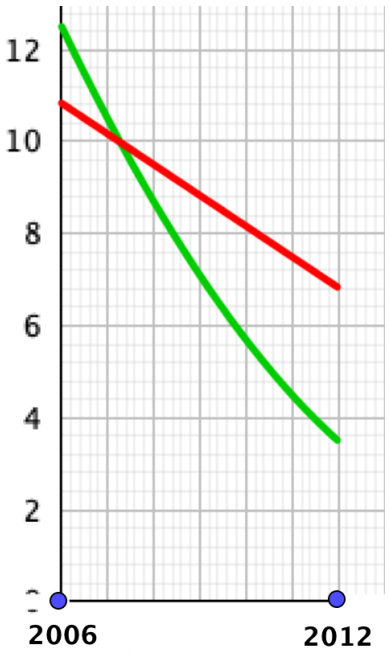
anno	CO_2 media
2007	383.72
2008	385.57
2009	387.36
2010	389.78

5. Bolla immobiliare: domanda e offerta

Il Presidente del centro-studi *Scenari Immobiliari* stima che nell'intero 2012 verranno acquistate a Roma 3.500 case nuove, contro le 4.500 dell'anno scorso e le 5.700 del 2010. Secondo i dati

del Cresme, nel 2006 a Roma erano stati realizzati 10.836 nuovi appartamenti, che nel 2011 sono scesi a 7.500.

[Fonte: **Libro dei Fatti. Autostrade per l'Italia, 2012**]



Le due funzioni seguenti descrivono la domanda e l'offerta di nuove case (in migliaia di unità immobiliari) a Roma nel periodo 2006-2012, assumendo come anno zero, $t = 0$, il 2006.

- *domanda*: $D(t) = 12.5 - 2.1t + 0.1t^2$
- *offerta*: $O(t) = 10.836 - 0.6672t$
- Rappresentare graficamente i due modelli in un opportuno sistema di riferimento cartesiano e descrivere il fenomeno nel periodo 2006-2012, mettendo in evidenza crescenza, decrescenza, punti di equilibrio.

Nel periodo in esame la funzione domanda e la funzione offerta sono entrambe in diminuzione (funzioni decrescenti).

Nel 2006 la domanda era superiore all'offerta, mentre nel 2008 è risultata inferiore, quindi si è verificato un momento in cui la domanda è stata pari all'offerta (*punto di equilbrio*).

- Stabilire se nel periodo in esame c'è stato equilibrio fra domanda e offerta e, in caso affermativo, si determini l'anno in cui si è verificato.

Per rispondere al quesito confermando la congettura del punto precedente, risolviamo l'equazione di equilibrio fra domanda e offerta:

$$D(t) = O(t)$$

che si riduce all'equazione $0.1t^2 - 1.4328t + 1,664 = 0$ che ammette due soluzioni, solo una delle quali è nell'intervallo [0, 6] del modello, ossia $t = 1.27$, istante compreso tra 2007 e 2008, cioè durante l'anno 2008. Poichè $O(1.21) = D(1.24) = 10$ si può stimare che durante la fase di equilibrio si sono vendute 10 000 nuove case.