Similitudini nel piano complesso

Mario Puppi

gennaio 2019

Traslazioni nel piano complesso. Ricordiamo che una trasformazione t, del piano complesso in sè, è una traslazione se e solo se esiste un numero complesso b tale che si abbia $t(z) = z + b$ per ogni punto z del piano complesso:

$$t : z \mapsto t(z) = z + b$$

Rotazioni di centro l'origine. Ricordiamo che una trasformazione r, del piano complesso in sè, è una rotazione di centro l'origine se e solo se esiste un numero complesso a, di lunghezza 1, tale che si abbia $r(z) = az$ per ogni punto z del piano complesso:

$$r : z \mapsto r(z) = az$$

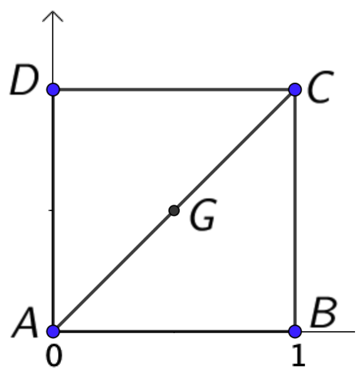
D'altra parte, un numero complesso a di lunghezza 1 è caratterizzato dall'angolo θ, per cui si può scrivere:

$$a = cos\,\theta + i\;sin\,\theta$$

e diciamo anche che θ è l'angolo della rotazione $z \mapsto az$

Rotazioni. In generale, una rotazione r, del piano complesso in sè, si ottiene per composizione di una rotazione di centro l'origine e di una traslazione. Esitono un numero complesso a di lunghezza 1, e un muero complesso b tali che si abbia $r(z) = az + b$ per ogni punto z del piano complesso:

$$r : z \mapsto r(z) = az + b$$



Problema 1. In un riferimento cartesiano il punto A è l'origine, B è il punto (1,0), i punti C, D, nel semipiano $y > 0$, formano un quadrato $ABCD$, G è il punto medio della diagonale AC.

- Determinare la traslazione t che trasforma B in G.

- Determinare l'equazione $z' = f(z)$ della rotazione f di centro A tale che $f(B) = D$.
- Determinare l'equazione $z' = g(z)$ della rotazione $g = t \circ f$ che trasforma z in $g(z) = t(f(z))$.
- Determinare l'angolo e il centro della rotazione g.

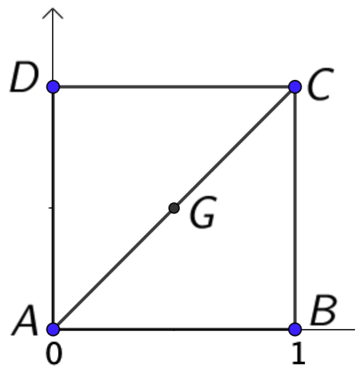
Omotetie di centro l'origine. Un'omotetia h, di centro l'origine, è data dalla moltiplicazione per un numero reale k fissato. Si ha così $h(z) = kz$ per ogni punto z del piano complesso:

$$h : z \mapsto h(z) = kz$$

Omotetie. Un'omotetia h, in generale, è composta da un'omotetia di centro l'origine (che è la moltiplicazione per un numero reale k fissato) e da una traslazione (che consiste nell'addizione di un numero complesso b fissato). Si ha così $h(z) = kz + b$ per ogni punto z del piano complesso:

$$h : z \mapsto h(z) = kz + b$$

Problema 2. Sia h l'omotetia di centro A che manda G in C



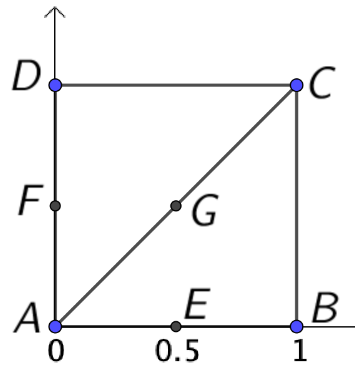
- Determinare l'equazione complessa $z' = h(z)$ dell'omotetia h.
- Determinare l'equazione complessa $z' = t(h(z))$ di $t \circ h$
- Determinare il rapporto e il centro dell'omotetia $t \circ h$
- Determinare l'equazione dell'omotetia di centro C che trasforma G in A

Similitudini dirette. Una similitudine diretta f, in generale, è composta da un'omotetia (moltiplicazione per un numero reale k fissato), da una rotazione (moltiplicazione per un numero immaginario u di modulo 1) e da una traslazione (addizione di un numero complesso b fissato). Si ha così $h(z) = ukz + b$ per ogni punto z del piano complesso. Possiamo mettere assieme rotazione e omotetia scrivendo $a = ku$ e quindi:

$$h : z \mapsto h(z) = az + b$$

La trasformazione $z \mapsto az$ è detta anche *rotomotetia*.

Problema 3. Siano E, F i punti medi dei lati AB, AD.



- Determinare l'equazione $z' = r(z)$ della rotazione r di centro C tale che $r(F) = E$.
- Determinare l'equazione $z' = r^{-1}(z)$ dell'inversa di r.
- Determinare l'equazione $z' = h(r(z))$ della similitudine $h \circ r$
- Determinare l'equazione della similitudine diretta che trasforma ABC in AGF

Coniugio. Il *coniugio* è la riflessione (*simmetria assiale*) attorno all'asse x:

$$z \mapsto \overline{z}$$

Riflessioni. La riflessione (*simmetria assiale*) attorno ad una retta parallela all'asse x si ottiene componendo il coniugio con una traslazione:

$$z \mapsto \overline{z} + b$$

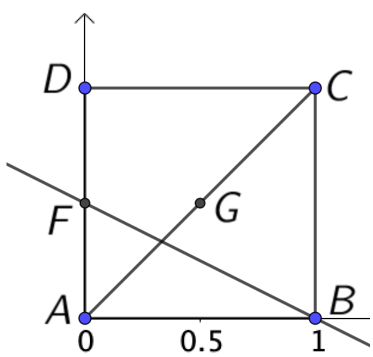
In gnerale, la riflessione attorno ad una retta qualsiasi si ottiene componendo con il coniugio con una traslazione e una rotazione (moltiplicazione per un numero immaginario u di modulo 1:

$$z \mapsto u\overline{z} + b$$

Similitudini. Una similitudine indiretta è data dalla composizione del coniugio con una similitudine diretta:

$$z \mapsto a\overline{z} + b$$

Problema 4.



- Determinare l'equazione della rotazione di centro A che trasforma la retta AB nella retta AC
- Determinare l'equazione della riflessione di asse la diagonale BD
- Determina la similitudine che trasforma il trapezio $EBCG$ nel trapezio $FDCG$
- Determinare l'equazione $z' = s(z)$ della riflessione s di asse BF.