La matematica dei gusci

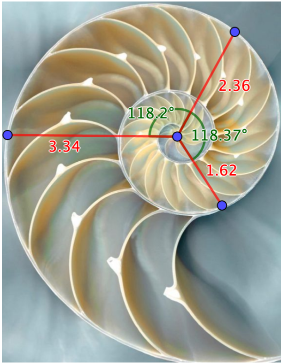
Istituto Superiore E. Majorana, Mirano (VE)

11 giugno 2019

Modelli di gusci

L'oggetto della nostra ricerca è il processo di crescita delle conchiglie dei molluschi. Abbiamo concentrato il nostro studio inizialmente sul modello di Raup e ci siamo proposti di

- capire il significato dei parametri di Raup.
- riprodurre il modello nel linguaggio Mathematica
- verificare il modello su conchiglie esistenti in natura.
- fare un nuovo modello basato sull'idea di similitudine.



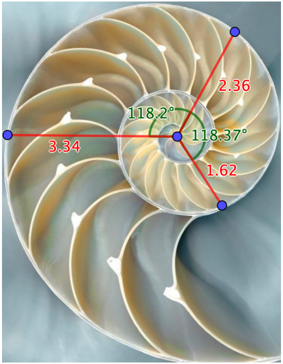
La matematica dei gusci

Modelli di conchiglie

Modelli di gusci

L'oggetto della nostra ricerca è il processo di crescita delle conchiglie dei molluschi. Abbiamo concentrato il nostro studio inizialmente sul modello di Raup e ci siamo proposti di

- capire il significato dei parametri di Raup.
- riprodurre il modello nel linguaggio Mathematica
- verificare il modello su conchiglie esistenti in natura.
- fare un nuovo modello basato sull'idea di similitudine.



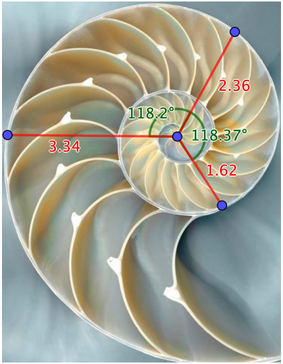
La matematica dei gusci

Modelli di conchiglie

Modelli di gusci

L'oggetto della nostra ricerca è il processo di crescita delle conchiglie dei molluschi. Abbiamo concentrato il nostro studio inizialmente sul modello di Raup e ci siamo proposti di

- capire il significato dei parametri di Raup.
- riprodurre il modello nel linguaggio Mathematica
- verificare il modello su conchiglie esistenti in natura.
- fare un nuovo modello basato sull'idea di similitudine.



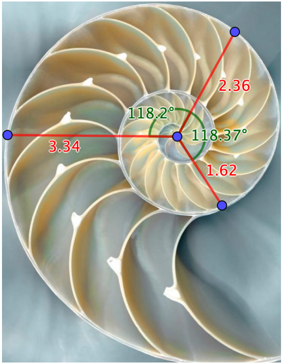
La matematica dei gusci

Modelli di conchiglie

Modelli di gusci

L'oggetto della nostra ricerca è il processo di crescita delle conchiglie dei molluschi. Abbiamo concentrato il nostro studio inizialmente sul modello di Raup e ci siamo proposti di

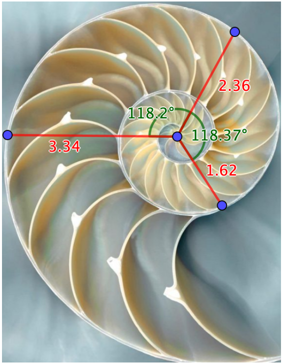
- capire il significato dei parametri di Raup.
- riprodurre il modello nel linguaggio Mathematica
- verificare il modello su conchiglie esistenti in natura.
- fare un nuovo modello basato sull'idea di similitudine.



Modelli di gusci

L'oggetto della nostra ricerca è il processo di crescita delle conchiglie dei molluschi. Abbiamo concentrato il nostro studio inizialmente sul modello di Raup e ci siamo proposti di

- capire il significato dei parametri di Raup.
- riprodurre il modello nel linguaggio Mathematica
- verificare il modello su conchiglie esistenti in natura.
- fare un nuovo modello basato sull'idea di similitudine.



La matematica dei gusci

Modelli di conchiglie

D’Arcy Thompson

Nella maggior parte dei molluschi la crescita dei gusci è analoga a un tubo che si avvolge a spirale attorno ad un asse, crescendo in larghezza.

D’Arcy Thompson (*On Growth and Form*, 1917), osserva che:

- crescita per addizione: il guscio cresce aggiungendo nuova materia a quella già esistente
- invarianza della forma: ad ogni fase del processo di crescita il mollusco conserva la forma così come la parte del guscio che lo contiene (camera)
- forma universale: due conchiglie della stessa specie in fasi diverse della loro crescita sono una l’allargamento dell’altra

La matematica dei gusci

Modelli di conchiglie

D'Arcy Thompson

Nella maggior parte dei molluschi la crescita dei gusci è analoga a un tubo che si avvolge a spirale attorno ad un asse, crescendo in larghezza.
D'Arcy Thompson (*On Growth and Form*, 1917), osserva che:

- crescita per addizione: il guscio cresce aggiungendo nuova materia a quella già esistente
- invarianza della forma: ad ogni fase del processo di crescita il mollusco conserva la forma così come la parte del guscio che lo contiene (camera)
- forma universale: due conchiglie della stessa specie in fasi diverse della loro crescita sono una l'allargamento dell'altra

D'Arcy Thompson

Nella maggior parte dei molluschi la crescita dei gusci è analoga a un tubo che si avvolge a spirale attorno ad un asse, crescendo in larghezza.
D'Arcy Thompson (*On Growth and Form*, 1917), osserva che:

- crescita per addizione: il guscio cresce aggiungendo nuova materia a quella già esistente
- invarianza della forma: ad ogni fase del processo di crescita il mollusco conserva la forma così come la parte del guscio che lo contiene (camera)
- forma universale: due conchiglie della stessa specie in fasi diverse della loro crescita sono una l'allargamento dell'altra

La matematica dei gusci

Modelli di conchiglie

D'Arcy Thompson

Nella maggior parte dei molluschi la crescita dei gusci è analoga a un tubo che si avvolge a spirale attorno ad un asse, crescendo in larghezza.
D'Arcy Thompson (*On Growth and Form*, 1917), osserva che:

- crescita per addizione: il guscio cresce aggiungendo nuova materia a quella già esistente
- invarianza della forma: ad ogni fase del processo di crescita il mollusco conserva la forma così come la parte del guscio che lo contiene (camera)
- forma universale: due conchiglie della stessa specie in fasi diverse della loro crescita sono una l'allargamento dell'altra

D'Arcy Thompson

Nella maggior parte dei molluschi la crescita dei gusci è analoga a un tubo che si avvolge a spirale attorno ad un asse, crescendo in larghezza.
D'Arcy Thompson (*On Growth and Form*, 1917), osserva che:

- crescita per addizione: il guscio cresce aggiungendo nuova materia a quella già esistente
- invarianza della forma: ad ogni fase del processo di crescita il mollusco conserva la forma così come la parte del guscio che lo contiene (camera)
- forma universale: due conchiglie della stessa specie in fasi diverse della loro crescita sono una l'allargamento dell'altra

La matematica dei gusci

Modelli di conchiglie

Origini del modello di Raup

- equazioni di Raup:

$$
\begin{cases}
x = R_0 W^{\frac{\theta}{2\pi}} \left(1 + \dfrac{1-D}{1+D}\cos\varphi\right)\cos\theta \\
y = R_0 W^{\frac{\theta}{2\pi}} \left(1 + \dfrac{1-D}{1+D}\cos\varphi\right)\sin\theta \\
z = R_0 W^{\frac{\theta}{2\pi}} \dfrac{1-D}{1+D}\sin\varphi
\end{cases}
$$

- Idea base del modello: (XVIII secolo) Conchiglie come il Nautilus hanno la geometria della spirale logaritmica
- validità del modello spirale: (1920ca) D'Arcy Thompson: la spirale logaritmica è la forma dei gusci di molti molluschi
- contributo di Raup: Raup(1966) la forma dei gusci di molti molluschi è un tubo che si avvolge come una spirale logaritmica elicoidale

La matematica dei gusci

Modelli di conchiglie

Origini del modello di Raup

- equazioni di Raup:

$$\begin{cases} x = R_0 W^{\frac{\theta}{2\pi}} \left(1 + \frac{1-D}{1+D} \cos\varphi\right) \cos\theta \\ y = R_0 W^{\frac{\theta}{2\pi}} \left(1 + \frac{1-D}{1+D} \cos\varphi\right) \sin\theta \\ z = R_0 W^{\frac{\theta}{2\pi}} \frac{1-D}{1+D} \sin\varphi \end{cases}$$

- Idea base del modello: (XVIII secolo) Conchiglie come il Nautilus hanno la geometria della spirale logaritmica
- validità del modello spirale: (1920ca) D'Arcy Thompson: la spirale logaritmica è la forma dei gusci di molti molluschi
- contributo di Raup: Raup(1966) la forma dei gusci di molti molluschi è un tubo che si avvolge come una spirale logaritmica elicoidale

La matematica dei gusci

Modelli di conchiglie

Origini del modello di Raup

- equazioni di Raup:

$$\begin{cases} x = R_0 W^{\frac{\theta}{2\pi}} \left(1 + \frac{1-D}{1+D}\cos\varphi\right)\cos\theta \\ y = R_0 W^{\frac{\theta}{2\pi}} \left(1 + \frac{1-D}{1+D}\cos\varphi\right)\sin\theta \\ z = R_0 W^{\frac{\theta}{2\pi}} \frac{1-D}{1+D}\sin\varphi \end{cases}$$

- Idea base del modello: (XVIII secolo) Conchiglie come il Nautilus hanno la geometria della spirale logaritmica
- validità del modello spirale: (1920ca) D'Arcy Thompson: la spirale logaritmica è la forma dei gusci di molti molluschi
- contributo di Raup: Raup(1966) la forma dei gusci di molti molluschi è un tubo che si avvolge come una spirale logaritmica elicoidale

La matematica dei gusci

Modelli di conchiglie

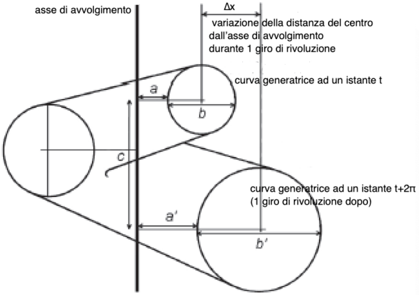
Origini del modello di Raup

- equazioni di Raup:

$$\begin{cases} x = R_0 W^{\frac{\theta}{2\pi}} \left(1 + \frac{1-D}{1+D}\cos\varphi\right)\cos\theta \\ y = R_0 W^{\frac{\theta}{2\pi}} \left(1 + \frac{1-D}{1+D}\cos\varphi\right)\sin\theta \\ z = R_0 W^{\frac{\theta}{2\pi}} \frac{1-D}{1+D}\sin\varphi \end{cases}$$

- Idea base del modello: (XVIII secolo) Conchiglie come il Nautilus hanno la geometria della spirale logaritmica
- validità del modello spirale: (1920ca) D'Arcy Thompson: la spirale logaritmica è la forma dei gusci di molti molluschi
- contributo di Raup: Raup(1966) la forma dei gusci di molti molluschi è un tubo che si avvolge come una spirale logaritmica elicoidale

Parametri del modello di Raup



- parametro W: rapporto di due diametri b, b' della curva generatrice a distanza di 1 giro di rotazione attorno all'asse

$$W = \frac{b'}{b}$$

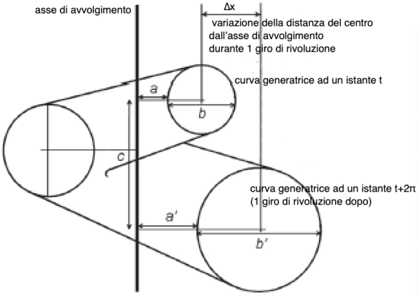
- parametro D:

$$D = \frac{a}{a+b}$$

- parametro T: scorrimento lungo l'asse di avvolgimento

$$T = \frac{c}{\Delta x}$$

Parametri del modello di Raup



- parametro W: rapporto di due diametri b, b' della curva generatrice a distanza di 1 giro di rotazione attorno all'asse

$$W = \frac{b'}{b}$$

- parametro D:

$$D = \frac{a}{a+b}$$

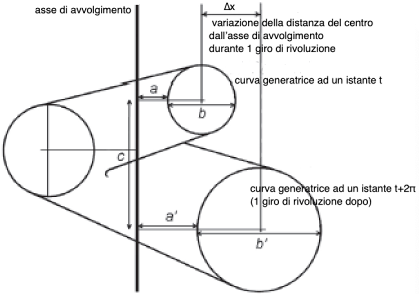
- parametro T: scorrimento lungo l'asse di avvolgimento

$$T = \frac{c}{\Delta x}$$

La matematica dei gusci

Modelli di conchiglie

Parametri del modello di Raup



- parametro W: rapporto di due diametri b, b' della curva generatrice a distanza di 1 giro di rotazione attorno all'asse

$$W = \frac{b'}{b}$$

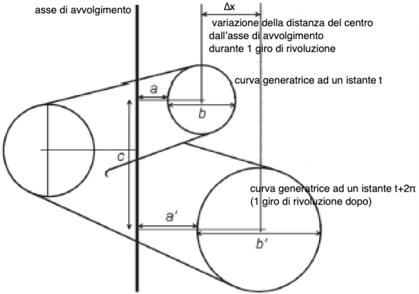
- parametro D:

$$D = \frac{a}{a+b}$$

- parametro T: scorrimento lungo l'asse di avvolgimento

$$T = \frac{c}{\Delta x}$$

Parametri del modello di Raup



- parametro W: rapporto di due diametri b, b' della curva generatrice a distanza di 1 giro di rotazione attorno all'asse

$$W = \frac{b'}{b}$$

- parametro D:

$$D = \frac{a}{a+b}$$

- parametro T: scorrimento lungo l'asse di avvolgimento

$$T = \frac{c}{\Delta x}$$

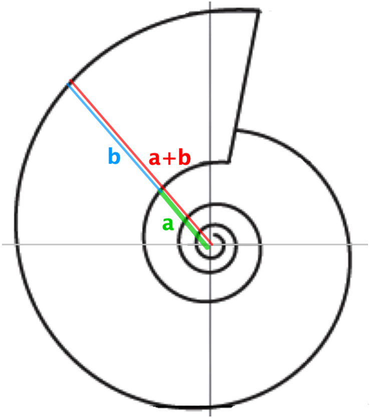
La matematica dei gusci

Modelli di conchiglie

Parametro D

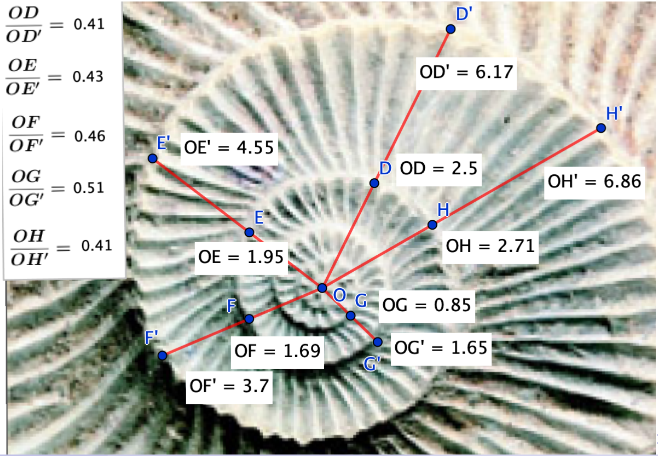
$D = \frac{a}{a+b}$ è il rapporto tra la distanza a dall'asse del margine interno e la distanza $a+b$ del margine esterno della curva generatrice.

D rimane invariato per l'intero processo di crescita.



Parametro D nell'ammonite

$D = \frac{a}{a+b}$ è il rapporto tra la distanza dall'asse del margine interno e la distanza del margine esterno della curva generatrice.

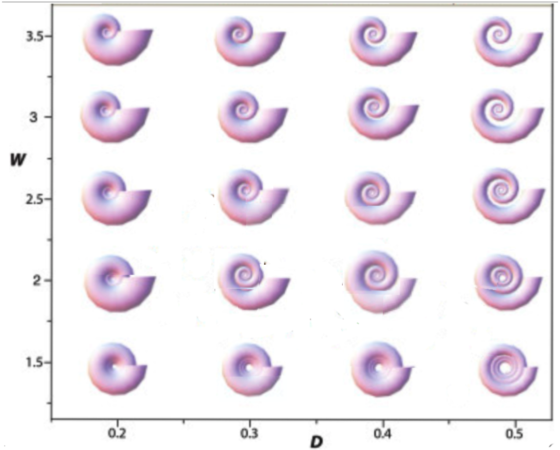


La matematica dei gusci

Modelli di conchiglie

Morfospazio

Raup fece variare i parametri W e D, ssumendo $T = 0$ e ottenne il **morfospazio delle ammoniti**:

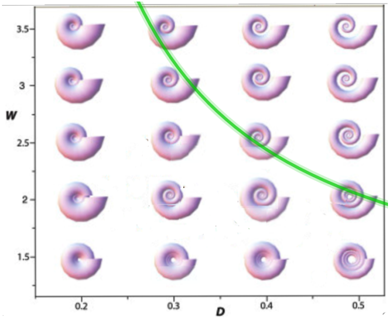


La matematica dei gusci

Modelli di conchiglie

Condizione Snugness

L'iperbole $W = \frac{1}{D}$ divide le conchiglie le cui spire si sovrappongono dalle conchiglie le cui spire non si toccano. Le ammoniti sull'iperbole hanno spire che si toccano.



In natura, la maggior parte delle ammoniti sono vicine all'iperbole e soddisfano la condizione $W \leq \frac{1}{D}$.

La matematica dei gusci

Modelli di conchiglie

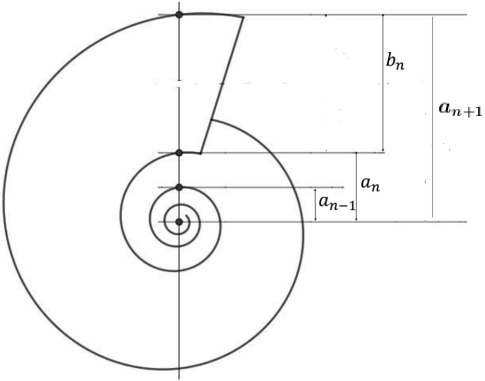
Condizione Snugness

Per definizione:

$$D = \frac{a_n}{a_n + b_n}$$

$$W = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$a_n + b_n = a_{n+1}$$



Ne segue che

$$D = \frac{a_n}{a_n + b_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{1}{W}$$

Spirale logaritmica

In generale, il modello di Raup è una superficie:

$$F(t, \phi) = (x(t, \phi), y(t, \phi), z(t, \phi))$$

ma alcuni tipi di conchiglie come le ammoniti o il nautilus sono prive di scorrimento lungo l'asse. Il parametro T è nullo e bastano i due parametri D, W. In tali conchiglie la coordinata z rimane costante con valore 0 e di conseguenza anche la coordinata $\phi = 0$ rimane costante durante il processo di crescita. Possiamo descrivere la conchiglia con la curva

$$f(t) = F[t, 0] = (x(t), y(t), 0)$$

E' la *spirale logaritmica*:

$$x(t) = A\, W^{\frac{t}{2\pi}} cos\ t, \;\; y(t) = A\, W^{\frac{t}{2\pi}} sin\ t$$

La matematica dei gusci

Modelli di conchiglie

Spirale logaritmica: ammonite

Vogliamo fare il modello di un'ammonite usando la *spirale logaritmica*:

$$x(t) = A\,W^{\frac{t}{2\pi}} cos\ t, \;\; y(t) = A\,W^{\frac{t}{2\pi}} sin\ t$$

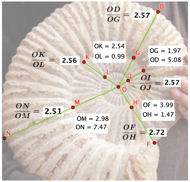
Determiniamo il parametro cartteristico W (whorl) dall'osservazione della foto di un'ammonite

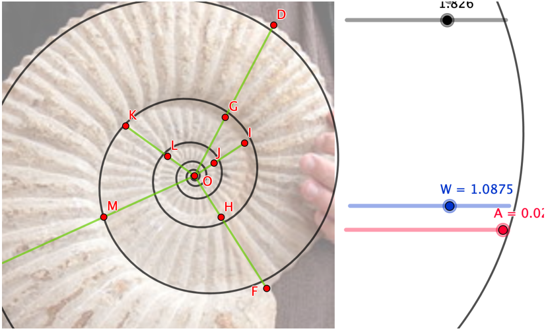
Spirale logaritmica: ammonite

La *spirale logaritmica*:

$$x(t) = A\, W^{\frac{t}{2\pi}} \cos t, \quad y(t) = A\, W^{\frac{t}{2\pi}} \sin t$$

è un modello della nostra ammonite con un valore di W prossimo a 2.6



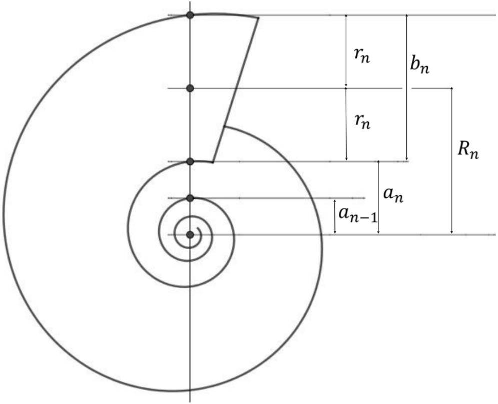


La matematica dei gusci

Modelli di conchiglie

Costruzione del modello di Raup

Parametri. Il numero di giri di rivoluzione attorno all'asse nel processo di crescita di un guscio è indicato con n.



$$R_n = \frac{b_n}{2} + a_n$$

$$r_n = \frac{b_n}{2}$$

$$D = \frac{a_n}{a_n + b_n}$$

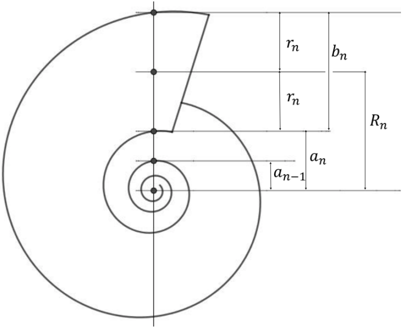
$$W = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

La matematica dei gusci

Modelli di conchiglie

Costruzione del modello di Raup

Il parametro D.



$$R_n = \frac{b_n}{2} + a_n$$

$$r_n = \frac{b_n}{2}$$

$$D = \frac{a_n}{a_n + b_n}$$

Possiamo dedurne:

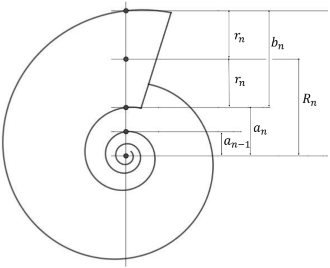
$$D = \frac{R_n - r_n}{R_n + r_n} \qquad r_n = \frac{1-D}{1+D} R_n$$

La matematica dei gusci

Modelli di conchiglie

Costruzione del modello di Raup

Il parametro W.



$$R_n = \frac{b_n}{2} + a_n$$

$$r_n = \frac{b_n}{2}$$

$$W = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Possiamo dedurne:

$$a_n = R_n - r_n = (1 - \frac{1-D}{1+D})R_n \qquad W = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{R_n}{R_{n-1}}$$

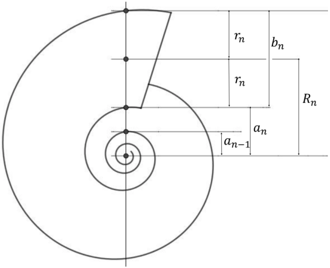
' R_n è progressione geometrica di ragione W: $R_n = WR_{n-1}$

La matematica dei gusci

Modelli di conchiglie

Costruzione del modello di Raup

Il parametro T.



$$T = \frac{\Delta z}{\Delta R}$$

$$\Delta z = R_0 W^{\frac{\theta}{2\pi}} T$$

da cui

$$z = r_\theta sin\,\phi + R_0 W^{\frac{\theta}{2\pi}} T$$

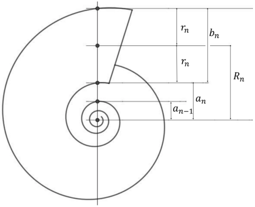
,

$$= R_0 W^{\frac{\theta}{2\pi}} (T + \frac{1-D}{1+D} sin\,\phi)$$

,

Costruzione del modello di Raup

Dal discreto al continuo.



Da $R_n = WR_{n-1}$ segue che

$$R_n = R_0 W^n$$

Dalla variabile discreta n passiamo alla variabile continua θ: se $n = 1$ gito, allora $\theta = 2\pi$. Ne segue che

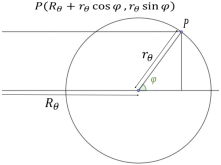
$$n = \frac{\theta}{2\pi}$$

La progressione geometrica $R_n = R_0 W^n$ nel continuo diviene:

$$R_\theta = R_0 W^{\frac{\theta}{2\pi}}$$

Costruzione del modello di Raup

La formula di Raup. Nel processo di crescita il centro della curva generatrice percorre una spirale di raggio $R_\theta = R_0 W^{\frac{\theta}{2\pi}}$.



$$\begin{cases} x = R_\theta cos\ \theta \\ y = R_\theta sin\ \theta \end{cases}$$

- sostituzione di R_θ con x_P nella nostra formula
- introduzione della nuova coordinata ϕ
- espansione in altezza di y_P e poi lungo l'asse z

$$\begin{cases} x = (R_\theta + r_\theta cos\phi) cos\ \theta \\ y = (R_\theta + r_\theta cos\phi) sin\ \theta \\ z = r_\theta sin\ \phi \end{cases}$$

Costruzione del modello di Raup

Le equazioni di Raup con i parametri.

$$\begin{cases} x = R_0 W^{\frac{\theta}{2\pi}} \left(1 + \dfrac{1-D}{1+D}\cos\varphi\right)\cos\theta \\ y = R_0 W^{\frac{\theta}{2\pi}} \left(1 + \dfrac{1-D}{1+D}\cos\varphi\right)\sin\theta \\ z = R_0 W^{\frac{\theta}{2\pi}} \dfrac{1-D}{1+D}\sin\varphi \end{cases}$$