Feline Doctrina Mathematica

Numero 1, 7 ottobre 2020

mario.puppi@gmail.com

Il metodo di riduzione e l'algebra lineare

Vediamo le proprietà di linearità che si annidano nel metodo di riduzione usato per risolvere i sistemi lineari.

I vettori spesa

I vettori spesa sono coppie di numeri sulle quali si possono fare due tipi di operazioni:

- Addizione
- Moltiplicazione scalare

Ad esempio, le due spese date nel problema si possono sommare:

$$\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\9\end{pmatrix}$$

- e moltiplicare per numeri:

$$3\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\6\end{pmatrix}$$

Le funzioni lineari

La funzione *costo* C protagonista del problema è una funzione che prende come input un vettore spesa e dà come risultato il costo della spesa, cioè un numero reale.

C è una funzione lineare, cioè una funzione con le due proprietà seguenti:

- il costo della somma di due spese A, B è la somma dei costi delle due spese:

$$C(A+B) = C\ A + C\ B$$

- per ogni spesa A e ogni numero r si ha

$$C(rA) = r\ (C\ A)$$

Ad esempio, il costo di $\begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix}$ che è 2 volte il vettore spesa $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ è 2 volte il costo di $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$

Problema 1

Esercizio n. 176 pag. 693. Ad un mercato ortofrutticolo vengono fatte nello stesso giorno due spese diverse di broccoli e cavolfiori:


176 EDUCAZIONE FINANZIARIA Quanto costano 1 kg di broccoli e 1 kg di cavolfiori? [€ 2,20; € 2,60]

Invece che tradurre le due informazioni in due equazioni con due variabili x, y lavoriamo con oggetti strutturati, le *spese*, che rappresentiamo come coppie ordinate (vettori), composte di due numeri ciascuna:

- 5kg di broccoli e 2kg di cavolfiori: $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$
- 3kg di broccoli e 7kg di cavolfiori: $\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$

Un elemento fondamentale di questo approccio è l'uso delle funzioni. Le due informazioni date sono degli indizi su una funzione lineare C, il *costo*, che è la vera protagonista da scoprire. Precisamente, conosciamo i valori che la funzione C assume su due vettori spesa:

- il costo di 5kg di broccoli e 2kg di cavolfiori è 16,20€: $C\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} = 16.20$
- il costo di 3kg di broccoli e 7kg di cavolfiori è 24,80€: $C\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix} = 24.80$

L'obiettivo è determinare i costi unitari, che non sono altro che i valori che la funzione C assume sui vettori spesa unitari:

- 1kg di broccoli: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$
- 1kg di cavolfiori: $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Calcoliamo il costo del triplo della prima spesa e del 5-plo della seconda spesa:

- $C\begin{pmatrix}15\\6\end{pmatrix} = 48.60$
- $C\begin{pmatrix}15\\35\end{pmatrix} = 124.00$

Una funzione lineare come C ha anche la proprietà della differenza:

- il costo della differenza di due spese A, B è la differenza dei costi delle due spese:

$$C(A-B) = C\ A - C\ B$$

I due vettori spesa hanno uguale la prima coordinata 15, siamo nelle condizioni di usare il principio di differenza, uno dei cardini del metodo di riduzione:

- $C\begin{pmatrix}15\\35\end{pmatrix} - C\begin{pmatrix}15\\6\end{pmatrix} = 124.00 - 48.60$

Per la linearità additiva della funzione costo C, si ha

- $C\begin{pmatrix}0\\29\end{pmatrix} = 75.40$

e per la linearità moltiplicativa della funzione costo C, si deduce il costo unitario di 1kg di cavolfiori:

- $C\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 2.60$

Per determinare il costo unitario di 1kg di broccoli usiamo ancora il metodo di riduzione, ossia la linearità della funzione C:

- C $\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} = C\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} - C\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = 16.20 - 5.20 = 11$

e quindi:

- $C\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{5}11 = 2.20$