Traslazioni

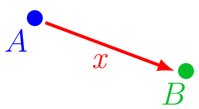
Mario Puppi

26 ottobre 2020

L'assioma di transitività

Problema 1. *Il problema di transitività*

Dati due punti A, B nel piano, quante sono le traslazioni x tali che $x \cdot A = B$?



Assumeremo che il problema abbia sempre un'unica soluzione, ipotesi che sarà il primo assioma della geometria dei parallelogrammi:

Assioma 1. *Assioma di transitività*

Per ogni coppia di punti A, B esiste un'unica traslazione t tale che $t \cdot A = B$

L'assioma di transitività ci permette di estendere il nostro vocabolario: per ogni coppia di punti A, B ha senso parlare della traslazione che trasforma A in B e la indicheremo con l'espressione $[A, B]$. Le parentesi quadre sono di fatto una nuova operazione che, dati due punti A, B, dà come risultato la traslazione $[A, B]$.

L'assioma di transitività si può scomporre in due leggi, una inversa dell'altra, che enunciamo come proposizioni

Proposizione 1.

Per ogni coppia di punti A, B e ogni traslazione x
se $x = [A, B]$ allora $x \cdot A = B$.

Transitività: è possibile andare da un punto ad un altro con almeno una traslazione

Proposizione 2.

Per ogni coppia di punti A, B e ogni traslazione x
se $x \cdot A = B$ allora $x = [A, B]$

Fedeltà: non c'è più di un modo per andare da un punto ad un altro con una traslazione

Forma vettoriale delle traslazioni

Lo strumento *vettore* di Geogebra è sufficiente per esprimere ogni traslazione t nella *forma vettoriale* $[A, B]$. Possiamo poi porci il seguente

Pienezza: ci sono abbastanza vettori per descrivere ogni traslazione

Problema 2. *Forma vettoriale delle traslazioni con origine fissata.*

Dati un punto A e una traslazione t, per quali punti X si ha $[A, X] = t$?

Proposizione 3.

Per ogni traslazione t, per ogni punto A si ha $t = [A, t \cdot A]$

Dimostrazione.

Dati la traslazione t e il punto A, consideriamo il punto $B = t \cdot A$.

L'equazione $x \cdot A = B$ ha come soluzione la traslazione t.

Per la proposizione 2 si ha $t = [A, B]$, cioè $t = [A, tA]$

Il problema 2 ammette sempre almeno una soluzione data dal punto $t \cdot A$.

Nella proposizione 3 abbiamo visto che, fissato un punto A, possiamo esprimere ogni traslazione t come vettore con origine nel punto A. Nella prossima proposizione dimostriamo che questa è l'unica rappresentazione vettoriale di t con origine A.

Proposizione 4.

Per ogni traslazione t e ogni punto A,
se X è un punto tale che $[A, X] = t$ allora $X = t \cdot A$.

Dimostrazione. Sia X è un punto tale che $[A, X] = t$, allora
per la prop. 1 si ha $X = [A, X] \cdot A$
e per ipotesi, $X = t \cdot A$.

La proprietà di unicità della rappresentazione vettoriale delle traslazioni con origine fissata può essere riformulata anche così:

Proposizione 5.

Per ogni terna di punti A, B, C se $[A, B] = [A, C]$ allora $B = C$.

Dimostrazione. Infatti, per la prop. 1 si ha
$B = [A, B] \cdot A$
$= [A, C] \cdot A$, per ipotesi,
$= C$, ancora per la prop. 1

Uguaglianza di traslazioni

Definizione 1.

Due traslazioni t, u sono uguali se per ogni punto X si ha $t \cdot X = u \cdot X$

Veramente, questa è la definizione generale di uguaglianza per due funzioni qualsiasi, non solo per le traslazioni.

La definizione di uguaglianza di due traslazioni t, u non è immediatamente praticabile, perchè non esiste alcun modo di verificare per tutti i punti X se sia vera l'uguaglianza $t \cdot X = u \cdot X$.

Fortunatamente, per stabilire se è vera l'uguaglianza $t = u$, per due traslazioni t, u, è sufficiente trovare un solo punto X per il quale sia vera l'uguaglianza tra i punti immagine: $t \cdot X = u \cdot X$

Proposizione 6.

Se t, u sono traslazioni e A è un punto tali che $t \cdot A = u \cdot A$ allora $t = u$

Dimostrazione. Per la proposizione 3 si ha
$t = [A, t \cdot A]$
$= [A, u \cdot A]$, per ipotesi
$= u$, ancora per la proposizione 3.

Se le due traslazioni sono scritte in forma vettoriale, possiamo enunciare il precedente criterio di uguaglianza nella forma seguente

Proposizione 7. ***Legge di Chasles***

Dati i punti A, B, C, D si ha $[A, B] = [C, D]$ se e solo se $[A, B] \cdot C = D$.

Dimostrazione. Supponiamo che $[A, B] = [C, D]$. Allora, per la proposizione 1 si ha: $[A, B] \cdot C = [C, D] \cdot C = D$.

Inversamente, se $[A, B] \cdot C = D$ allora le traslazioni $[A, B]$ e $[C, D]$ coincidono nel punto C, dato che $[C, D] \cdot C = D$. Per la proposizione 6, segue che $[A, B] = [C, D]$.

Esercizi: calcolo di espressioni

Esercizio 1.

Dati i punti A, B, e la traslazione t semplifica le espressioni seguenti:

(1) $[\,[A, B] \cdot A], \, B]$

(2) $[\,[A, B] \cdot A], \, B] \cdot A$

(3) $[A, t \cdot A] \cdot A$

(4) $[A, \, [A, t \cdot A] \cdot A\,]$

(5) $[B, \, [A, \, [A, t \cdot A] \cdot A\,] \cdot B]$

Esercizio 2.

Dati i punti A, B, C, e la traslazione t tali che $B = t \cdot A$, $C = t \cdot B$ semplifica le espressioni seguenti:

(1) $[\,[A, B] \cdot A], \, C]$

(2) $[B, \, [A, B] \cdot B]$

(3) $[B, \, [A, B] \cdot B] \cdot A$

(4) $[\,[A, B] \cdot A, \, [A, B] \cdot B] \cdot B$

(5) $[\,[A, B] \cdot B, \, [A, B] \cdot C] \cdot A$

(6) $[C, \, [A, B] \cdot C] \cdot A, \, t \cdot (t \cdot A)] \cdot B$