Geometria dei parallelogrammi

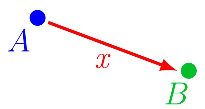
Mario Puppi

27 ottobre 2020

L'assioma di transitività

Problema 1. *Il problema di transitività*

Dati due punti A, B nel piano, quante sono le traslazioni x tali che $x \cdot A = B$?



Assumeremo che il problema abbia sempre un'unica soluzione, ipotesi che sarà il primo assioma della geometria dei parallelogrammi:

Assioma 1. *Assioma di transitività*

Per ogni coppia di punti A, B esiste un'unica traslazione t tale che $t \cdot A = B$

L'assioma di transitività ci permette di estendere il nostro vocabolario: per ogni coppia di punti A, B ha senso parlare della traslazione che trasforma A in B e la indicheremo con l'espressione $[A, B]$. Le parentesi quadre sono di fatto una nuova operazione che, dati due punti A, B, dà come risultato la traslazione $[A, B]$.

L'assioma di transitività si può scomporre in due leggi, una inversa dell'altra, che enunciamo come proposizioni

Proposizione 1.

Per ogni coppia di punti A, B e ogni traslazione x
se $x = [A, B]$ allora $x \cdot A = B$.

Transitività: è possibile andare da un punto ad un altro con almeno una traslazione

Proposizione 2.

Per ogni coppia di punti A, B e ogni traslazione x
se $x \cdot A = B$ allora $x = [A, B]$

Fedeltà: non c'è più di un modo per andare da un punto ad un altro con una traslazione

Forma vettoriale delle traslazioni

Lo strumento *vettore* di Geogebra è sufficiente per esprimere ogni traslazione t nella *forma vettoriale* $[A, B]$. Possiamo poi porci il seguente

Pienezza: ci sono abbastanza vettori per descrivere ogni traslazione

Problema 2. *Forma vettoriale delle traslazioni con origine fissata.*

Dati un punto A e una traslazione t, per quali punti X si ha $[A, X] = t$?

Proposizione 3.

Per ogni traslazione t, per ogni punto A si ha $t = [A, t \cdot A]$

Il problema 2 ammette sempre almeno una soluzione data dal punto $t \cdot A$.

Dimostrazione.
Dati la traslazione t e il punto A, consideriamo il punto $B = t \cdot A$.
L'equazione $x \cdot A = B$ ha come soluzione la traslazione t.
Per la proposizione 2 si ha $t = [A, B]$, cioè $t = [A, tA]$

Nella proposizione 3 abbiamo visto che, fissato un punto A, possiamo esprimere ogni traslazione t come vettore con origine nel punto A. Nella prossima proposizione dimostriamo che questa è l'unica rappresentazione vettoriale di t con origine A.

Proposizione 4.

Per ogni traslazione t e ogni punto A,
se X è un punto tale che $[A, X] = t$ allora $X = t \cdot A$.

Dimostrazione. Sia X è un punto tale che $[A, X] = t$, allora
per la prop. 1 si ha $X = [A, X] \cdot A$
e per ipotesi, $X = t \cdot A$.

La proprietà di unicità della rappresentazione vettoriale delle traslazioni con origine fissata può essere riformulata anche così:

Proposizione 5.

Per ogni terna di punti A, B, C se $[A, B] = [A, C]$ allora $B = C$.

Dimostrazione. Infatti, per la prop. 1 si ha
$B = [A, B] \cdot A$
$= [A, C] \cdot A$, per ipotesi,
$= C$, ancora per la prop. 1

Uguaglianza di traslazioni

Definizione 1.

Due traslazioni t, u sono uguali se per ogni punto X si ha $t \cdot X = u \cdot X$

Veramente, questa è la definizione generale di uguaglianza per due funzioni qualsiasi, non solo per le traslazioni.

La definizione di uguaglianza di due traslazioni t, u non è immediatamente praticabile, perchè non esiste alcun modo di verificare per tutti i punti X se sia vera l'uguaglianza $t \cdot X = u \cdot X$.

Fortunatamente, per stabilire se è vera l'uguaglianza $t = u$, per due traslazioni t, u, è sufficiente trovare un solo punto X per il quale sia vera l'uguaglianza tra i punti immagine: $t \cdot X = u \cdot X$

Proposizione 6.

Se t, u sono traslazioni e A è un punto tali che $t \cdot A = u \cdot A$ allora $t = u$

Dimostrazione. Per la proposizione 3 si ha
$t = [A, t \cdot A]$
$= [A, u \cdot A]$, per ipotesi
$= u$, ancora per la proposizione 3.

Se le due traslazioni sono scritte in forma vettoriale, possiamo enunciare il precedente criterio di uguaglianza nella forma seguente

Proposizione 7. ***Legge di Chasles***

Dati i punti A, B, C, D si ha $[A, B] = [C, D]$ se e solo se $[A, B] \cdot C = D$.

Dimostrazione. Supponiamo che $[A, B] = [C, D]$. Allora, per la proposizione 1 si ha: $[A, B] \cdot C = [C, D] \cdot C = D$.

Inversamente, se $[A, B] \cdot C = D$ allora le traslazioni $[A, B]$ e $[C, D]$ coincidono nel punto C, dato che $[C, D] \cdot C = D$. Per la proposizione 6, segue che $[A, B] = [C, D]$.

Esercizi: calcolo di espressioni

Esercizio 1.

Dati i punti A, B, e la traslazione t semplifica le espressioni seguenti:

(1) $[\,[A, B] \cdot A], B]$

(2) $[\,[A, B] \cdot A], B] \cdot A$

(3) $[A, t \cdot A] \cdot A$

(4) $[A, [A, t \cdot A] \cdot A\,]$

(5) $[B, [A, [A, t \cdot A] \cdot A\,] \cdot B]$

Esercizio 2.

Dati i punti A, B, C, e la traslazione t tali che $B = t \cdot A$, $C = t \cdot B$ semplifica le espressioni seguenti:

(1) $[\,[A, B] \cdot A], C]$

(2) $[B, [A, B] \cdot B]$

(3) $[B, [A, B] \cdot B] \cdot A$

(4) $[\,[A, B] \cdot A, [A, B] \cdot B] \cdot B$

(5) $[\,[A, B] \cdot B, [A, B] \cdot C] \cdot A$

(6) $[C, [A, B] \cdot C] \cdot A, t \cdot (t \cdot A)] \cdot B$

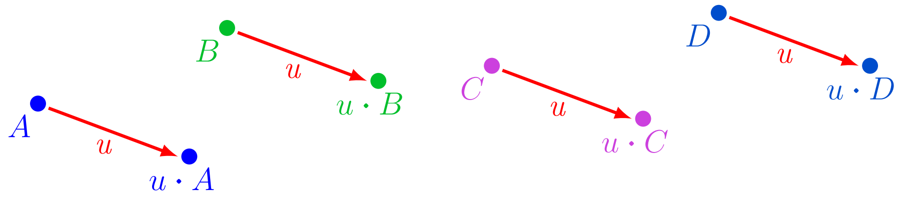
Assioma di omogeneità

Una traslazione u definisce una relazione tra i punti del piano. Diciamo che il punto Y è nella relazione u con X se

$$Y = u \cdot C$$

La traslazione u è l'insieme dei vettori della forma $[X, u \cdot X]$. Si tratta di un'immagine statica della traslazione u.

Un'immagine della relazione u è data da tutti i vettori che vanno da un punto X qualsiasi del piano alla sua immagine $u \cdot X$:

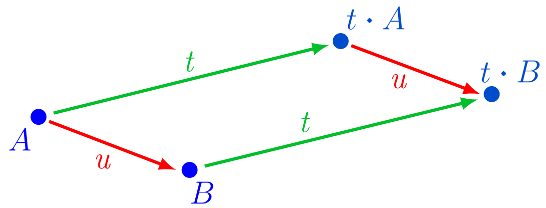


Assioma 2. *Assioma di omogeneità*

L'assioma di omogeneità dice che se trasliamo un vettore u della traslazione t si ottiene un vettore della stessa traslazione

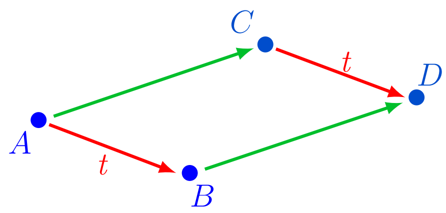
Per ogni coppia di punti A, B ed ogni traslazione t si ha

$$[t \cdot A, t \cdot B] = [A, B]$$



Proposizione 8.

Per ogni terna di punti A, B, C, si ha $[A, B] {\cdot} C = [A, C] \cdot B$



Dimostrazione.

Siano $D = [A, C] \cdot B$ e $t = [A, B]$.

Applichiamo l'assioma di omogeneità: $D = [A, C] \cdot B = [t \cdot A, t \cdot C] \cdot B$

$[A, C] \cdot B = D = [t \cdot A, t \cdot C] \cdot B = [B, t \cdot C] \cdot B = t \cdot C = [A, B] \cdot C$

Definizione 2.

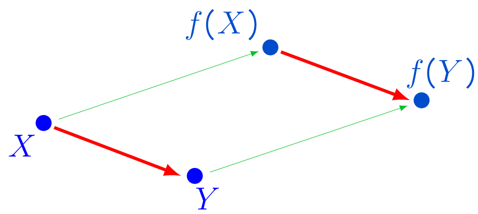
Un'applicazione geometrica f è *omogenea* se per ogni coppia di punti X, Y si ha $[f(X), f(Y)] = [X, Y]$

Proposizione 9.

Un'applicazione geometrica f è una traslazione se e solo se è omogenea:

$$[f(X), f(Y)] = [X, Y]$$

per ogni coppia di punti X, Y.



Dimostrazione.

1) Se f è una traslazione allora soddisfa $[f(X), f(Y)] = [X, Y]$ per l'assioma di omogeneità.

2) Supponiamo che f sia un'applicazione omogenea. Fissato un punto A, consideriamo la traslazione $t = [A, f(A)]$ e vediamo la sua azione su un punto X qualunque. Per la proposizione 8 si ha:

$$t \cdot X = [A, f(A)] \cdot X = [A, X] \cdot f(A)$$

Proviamo che $f(X)$ coincide con $t \cdot X = [A, X] \cdot f(A)$. Per la proposizione 2, basterà provare che $[f(A), f(X)] = [A, X]$, ma questa è vera perchè f è omogenea. Resta così dimostrato che $f(X) = t \cdot X$ e dunque f coincide con la traslazione t.

Proposizione 10.

Un'applicazione geometrica f è una traslazione se e solo se le traslazioni $[P, f(P)]$ sono tutte uguali, per ogni punto P.

Dimostrazione.

1) Se f è una traslazione allora $[P, f(P)] = f$ per ogni punto P (proposizione 3).

2) Supponiamo che esista una traslazione t tale che $[P, f(P)] = t$ per ogni punto P. Allora, per ogni punto P si ha (proposizione 3

$$f(P) = [P, f(P)] \cdot P = t \cdot P$$

e ciò dimostra che f coincide con la traslazione t.

L'identità

L'assioma di transitività assicura l'esistenza di una traslazione $[A, B]$ per ogni coppia di punti A, B del piano. Un caso davvero speciale è dato dalle traslazioni della forma $[A, A]$. Esse sono tutte uguali tra loro:

Proposizione 11.

Per tutti i punti A, B del piano si ha $[A, A] = [B, B]$.

Dimostrazione. Sia $t = [A, B]$. Per l'assioma di omogeneità si ha:

$$[A, A] = [t \cdot A, t \cdot A] = [B, B].$$

Definizione 3.

Per ogni punto punto A la traslazione $[A, A]$ è detta *traslazione nulla.*

Chiameremo *identità* la funzione ι del piano in sè che trasforma ogni punto X nel punto X stesso: $\iota(X) = X$

Proposizione 12.

La traslazione nulla coincide con l'identità: per tutti i punti A, X si ha $[A, A] \cdot X = X$.

Dimostrazione.

Per la proposizione 11 si ha $[A, A] = [X, X]$

quindi, $[A, A] \cdot X = [X, X] \cdot X = X$ per la proposizione 1.

Possiamo invertire la precedente proposizione:

L'unica traslazione che coincide con l'identità è la traslazione nulla.

Proposizione 13.

Dati due punti A, B, se $[A,B] = \iota$ è l'identità allora $A = B$.

Dimostrazione.

Per la proposizione 12 si ha, per ogni punto X,

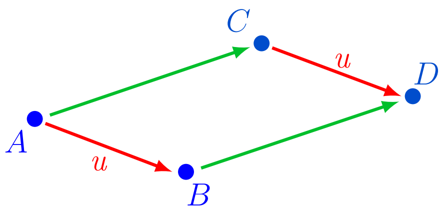
$$[A,B] \cdot X = \iota \cdot X = X = [A,A] \cdot X$$

Ne segue che $[A,B] = [A,A]$. Per la proposizione 5 si ha $A = B$

Parallelogrammi

La geometria classica si basa sui principi di congruenza che hanno per oggetto i triangoli. Essi stabiliscono delle condizioni perché due triangoli si possano considerare "uguali" per movimenti rigidi. Un triangolo possiamo pensarlo come un mezzo parallelogramma che è la nostra figura di riferimento.

Proposizione 14.
Per ogni 4-pla di punti A, B, C, D,
se $[A,B] = [C,D]$ allora $[A,C] = [B,D]$



Dimostrazione.

Assumiamo che $[A,B] = [C,D]$

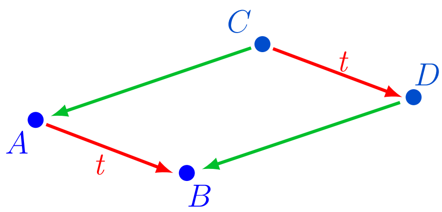
Sia $u = [A,B] = [C,D]$, per cui $B = u \cdot A$, $D = u \cdot C$

Allora $[A,C] = [u \cdot A, u \cdot C] = [B,D]$ per l'assioma di omogeneità.

Proposizione 15.

Per ogni 4-pla di punti A, B, C, D,

se $[A,B] = [C,D]$ allora $[D,B] = [C,A]$



Dimostrazione.

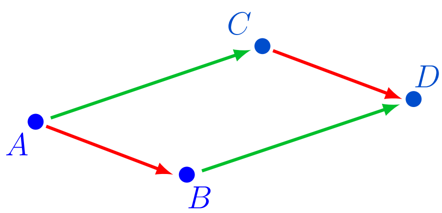
Assumiamo che $t = [A,B] = [C,D]$. Allora $t \cdot A = B$ e $t \cdot C = D$

Applichiamo l'assioma di omogeneità: $[D,B] = [t \cdot C, t \cdot A] = [C,A]$

Proposizione 16.

Per ogni 4-pla di punti A, B, C, D,

se $[A,B] = [C,D]$ allora $[D,C] = [B,A]$



Dimostrazione.

Assumiamo che $[A,B] = [C,D]$. Per la proposizione 14 si ha

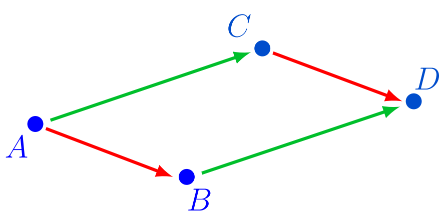
$$[A,C] = [B,D].$$

Applichiamo la proposizione 15 per dedurne:

$$[D,C] = [B,A]$$

Definizione 4.
Diremo che una figura ordinata composta da 4 punti (A, B, C, D) è un *parallelogramma* se essa soddisfa la formula:

$$[A,B] = [C,D]$$



Esercizi: traslazioni e parallelogrammi

Esercizio 3.

Per ogni 4-pla di punti A, B, C, D si ha che
(A, B, C, D) è un parallelogramma se e solo se lo è (B, C, D, A)

Esercizio 4.

Per ogni 4-pla di punti A, B, C, D si ha che
(A, B, C, D) è un parallelogramma se e solo se lo è (C, D, A, B)

Esercizio 5.

Per ogni 4-pla di punti A, B, C, D si ha che
(A, B, C, D) è un parallelogramma se e solo se lo è (D, A, B, C)

Esercizio 6.

Per ogni 4-pla di punti A, B, C, D si ha che
(A, B, C, D) è un parallelogramma se e solo se lo è (A, D, C, B)

Esercizio 7.

Per ogni 4-pla di punti A, B, C, D si ha che
(A, B, C, D) è un parallelogramma se e solo se lo è (D, C, B, A)

Esercizio 8.

Per ogni 4-pla di punti A, B, C, D si ha che
(A, B, C, D) è un parallelogramma se e solo se lo è (C, B, A, D)

Esercizio 9.

Per ogni 4-pla di punti A, B, C, D si ha che
(A, B, C, D) è un parallelogramma se e solo se lo è (B, A, D, C)

Esercizio 10.

Per ogni 6-pla di punti A, B, C, D, E, F se (A, B, D, C) e (C, D, F, E) sono parallelogrammi anche (A, B, F, E) lo è.

Esercizio 11.

Per ogni 6-pla di punti A, B, C, D, E, F tali che (A, B, C, D) e (A, B, E, F) siano parallelogrammi si ha $[C, E] = [D, F]$.