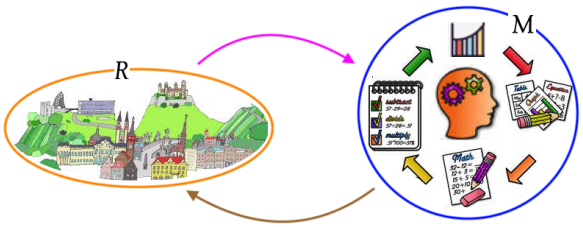
1. Introduzione ai modelli: stati ed azioni

Questo libro racconta dei modi e dei metodi per fare modelli matematici della realtà. Un modello M di un piccolo pezzo R del mondo reale è una costruzione matematica. Il fatto che rende interessante M è che è possibile ottenere informazioni sulla realtà R dallo studio di M.



Un modello M di R si basa su due tipi di informazioni che distingueremo in *stati* ed *azioni*. Gli *stati* descrivono "le cose che ci sono" in R, le *azioni* descrivono "come cambiano le cose"

Ci proponiamo di introdurre i due ingredienti fondamentali di un modello attraverso alcuni esempi familiari in cui gli stati saranno codificati con numeri e le azioni saranno codificate attraverso operazioni aritmetiche. Si tratta di due concetti che abbiamo già usato e che dovremo imparare a distinguere.

Esercizio 1

Osserviamo un autobus della linea Spinea-Venezia.

Quando l'autobus parte ci sono 5 passeggeri a bordo.

Alla prima fermata salgono 6 passeggeri.

Alla seconda fermata salgono 10 passeggeri.

Descrivere la serie di eventi con un modello in cui lo stato sia il *numero di viaggiatori che si trova sull'autobus durante il viaggio*.

Il *numero di viaggiatori sull'autobus in viaggio* è una quantità che indicheremo con il simbolo N. Trascuriamo quello che accade durante le fermate.

Vediamo come i tre dati vengono tradotti nel modello:

C'è uno *stato iniziale*, $N = 5$, vale a dire che 5 *passeggeri sono a bordo alla partenza*.

6 *persone salgono alla prima fermata*: è un'azione sullo stato iniziale, un'addizione che denotiamo **+6**

10 *persone salgono alla seconda fermata*: è un'azione sullo stato dell'autobus quando riparte dopo la prima fermata, un'addizione che indichiamo con **+10**

Soluzione Disegniamo il modello con un diagramma a tre stati e due azioni (rappresentati da frecce):

$$\boxed{N = 5} \xrightarrow{+6} \boxed{} \xrightarrow{+10} \boxed{}$$

Eseguiamo poi il calcolo sul modello per ottenere il *diagramma calcolato*:

$$\boxed{N = 5} \xrightarrow{+6} \boxed{N = 11} \xrightarrow{+10} \boxed{N = 21}$$

Operare sul modello (con la matematica) ha permesso di ottenere informazioni sul viaggio: lo stato $N = 11$ dopo la prima fermata e lo stato $N = 21$ dopo la seconda fermata.

Negli esercizi seguenti fare un modello della situazione reale con un diagramma a tre stati e due azioni.

Esercizio 2

Il conto in banca di Giorgio è di 13200 euro, deposita 500 euro e poi paga una bolletta di 124 euro.

Esercizio 3

Anna prende l'ascensore in un centro commerciale, sale dal primo piano fino al 6° piano e poi scende al 2° piano.

Esercizio 4

Alla mattina la temperatura era di 6°C, è salita a 20°C a mezzogiorno per poi scendere di 12 gradi a mezzanotte.

Esercizio 5

Andrea riceve 20 euro dal nonno.

Il giorno dopo spende 6 euro per il cinema.

Esercizio 6

I mobili per la camera di Carlo costano 375 euro.

Alla consegna, la madre paga i 3/5 dell'intera somma e dopo un mese paga la metà del rimanente. Lo stato sia la somma da pagare.

Esercizio 7

Roberta parte per un viaggio di 780 km in auto. Fa una sosta ad 1/3 del tragitto e la seconda sosta dopo altri 200 km.

Lo stato misuri il tratto rimanente del viaggio.

Nell'esercizio seguente fare un modello stati-azione che permetta di rispondere alla domanda.

Esercizio 8. Calgary Math. Association - Junior High School Contest 2004

Il signor Smith si versa una tazza piena di caffè e ne beve mezza tazza. Trova che sia troppo forte, così aggiunge del latte fino a riempire di nuovo la tazza, e poi mescola. Assaggia di nuovo, bevendo 1/4 di tazza. Aggiunge ancora latte fino a riempire di nuovo la tazza. Qual è la percentuale di caffè nella tazza ora? [risp. 60%]

Nell'esercizio seguente fare un modello stati-azione che descriva la storia.

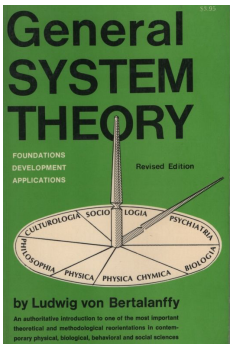
Esercizio 9

Dieci giorni fa Gregorio aveva 1.235 euro sul proprio conto in banca.

Gregorio preleva €357.

Il giorno dopo preleva altri €275 dal conto.

Dopo tre giorni riceve un bonifico di €500



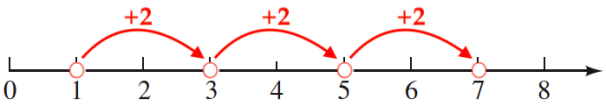
La parola *Sistemi* viene introdotta nell'ambito della modellizzazione dal biologo matematico *Ludwig von Bertalanffy* (1901-1972) che la usa per indicare un tipo di modello molto generale che sarà poi adottato da diverse discipline scientifiche che fanno uso di matematica.

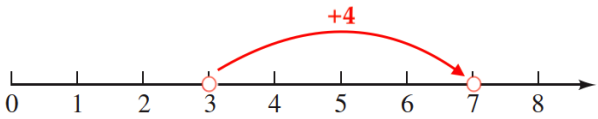
General system theory. Foundations, development, applications (1968) è un libro in cui Bertalanffy ha l'ambizione di delineare una teoria generale dei modelli che si possa applicare in tutte le discipline scientifiche.

Adotteremo il termine *sistema* per indicare *un pezzo della realtà di cui facciamo un modello* ed useremo il termine *spazio degli stati* per indicare l'insieme di tutti i possibili stati del modello che descrive un sistema.

2. Spazi numerici con addizione

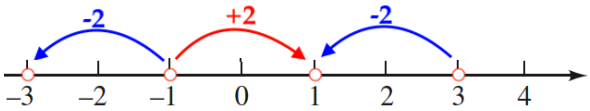
Semiretta dei numeri naturali. La *semiretta dei numeri naturali* **N** è lo spazio degli stati di un sistema.

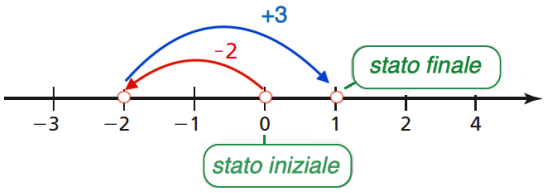




I numeri naturali sono gli stati, rappresentati come punti della semiretta. Le azioni sono le *addizioni*, che chiameremo *traslazioni*.

Retta dei numeri interi. Lo spazio degli stati sia la *retta dei numeri interi* **Z**, sotto l'azione dell'*addizione*.

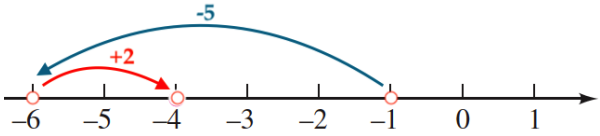




Il calcolo aritmetico (-2) +3 =1 si svolge nello spazio degli stati **Z**, (la retta degli interi):

- lo stato iniziale é **-2**
- l'azione dell'addizione **+3**
- lo trasforma nello stato finale **1**

Esercizio 10



Il calcolo aritmetico (-5) + 2 = -4 ha come stato iniziale **-5**, come azione **+2** e come stato finale **-4**.

Esercizio 11

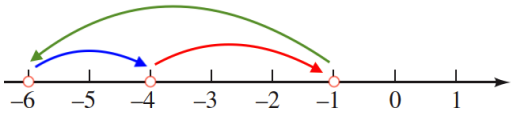
Descrivere sulla retta degli interi, soggetta all'azione delle addizioni, i calcoli: (-2) +(-5), 7+(-1), (-2)-3.

Esercizio 12

Considerare l'insieme di numeri interi $A = \{-3, -4, 6, 2, 4, -7, 1\}$. Completare ciascuno dei tre diagrammi seguenti scegliendo lo stato e l'operatore additivo mancanti nell'insieme A.

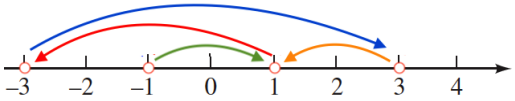
Esercizio 13

Scrivi un'espressione che rappresenti il calcolo descritto dal diagramma sulla retta degli interi, con quattro stati e tre azioni, assumendo come stato iniziale (e finale) **-6**.



Esercizio 14

Scrivi un'espressione che rappresenti il calcolo descritto dal diagramma sulla retta degli interi, composto da 4 stati e 4 azioni, con stato iniziale **-1**.



Esercizio 15. Giochi di Archimede 2002, biennio

In una vasca a forma di parallelepipedo con base quadrata di lato 40 cm viene immessa dell'acqua fino a raggiungere un livello di 30 cm. Poi viene completamente immerso nella vasca un cubo pieno di lato 20 cm. Qual é ora il livello dell'acqua?

Esercizio 16. Quora

La somma delle età di 9 ragazzi è di 54 anni. Quale sarà la somma delle età fra 14 anni?

Esercizio 17. Calgary Junior Math Contest 2007

Qual è la lettera che occupa il 2007* posto in ILOVEMATHILOVEMATHILOVEMATH ...

Esercizio 18. Calgary Junior Math Contest 2011

16 monete numerate da 1 a 16 sono rosse su una faccia e verdi sull'altra. Inizialmente hanno tutte la faccia rossa rivolta verso l'alto. Vengono girate tutte le monete pari, poi tutte le monete multiple di 4, quindi tutte le monete multiple di 8 e infine la moneta multipla di 16. Quante sono alla fine le monete con la faccia rossa rivolta verso l'alto?

Esercizio 19. Coppa Hilbert under 15, Parma, 6 dicembre 2012

Quanto vale la somma $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots + 2011 - 2012 + 2013$?

Esercizio 20. Giochi di Archimede 2010

Mago Merlino ha 7 palline bianche e 7 nere, e può fare due incantesimi: il primo fa sparire 3 palline nere e ne fa comparire 2 bianche (purché ci siano almeno 3 palline nere); il secondo fa sparire 4 palline bianche e ne fa comparire 9 nere (purché almeno 4 palline siano bianche). Dopo aver lanciato vari incantesimi quale dei seguenti stati si può verificare?

- (A) 2 palline bianche e 15 nere
- (B) 4 palline bianche e 14 nere
- (C) 3 palline bianche e 11 nere
- (D) 7 palline bianche e 13 nere
- (E) 10 palline bianche e 10 nere

Esercizio 21. La partita del secolo

Italia-Germania 4-3 (1970, Mexico). Disegni di Franco Bochicchio.

Fonti: *https://www.ilbazardelcalcio.com/2022/06/la-partita-del-secolo-italia-germania-4.html*

Modello della partita:

Spazio degli stati:

i possibili *risultati* parziali

0-0, 1-0, 0-1, 2-0, 1-1, 0-2, . . .

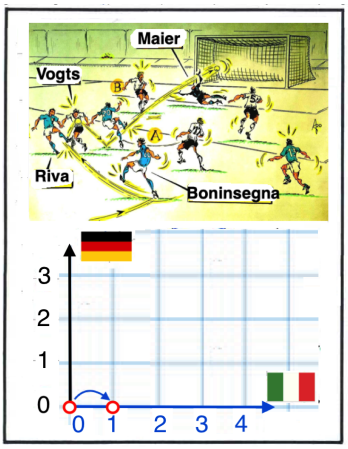
che si possono verificare durante una partita di calcio

Azioni:

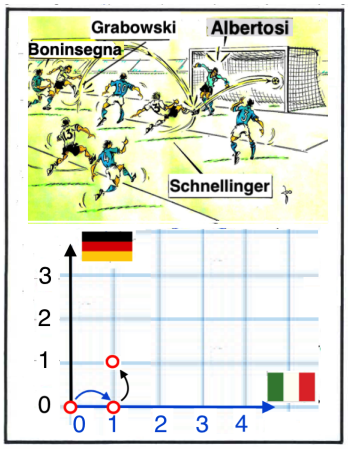
- **I**, *segna l'Italia*
- **G**, *segna la Germania*

Stato iniziale:

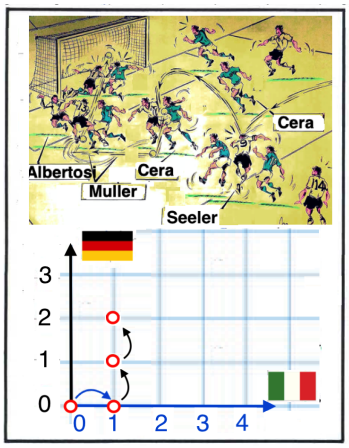
Italia-Germania 0-0



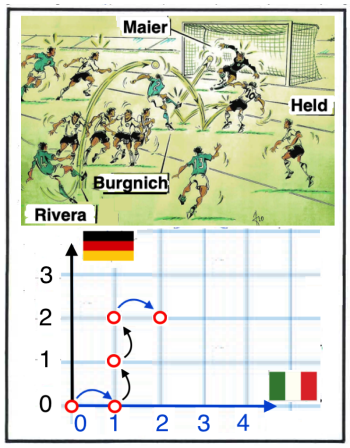
8': *segna Boninsegna* (I)



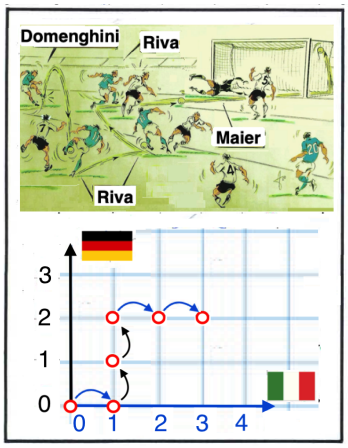
90': *segna Schnellinger* (G)



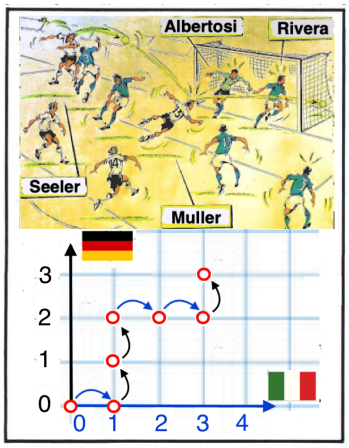
94': *segna Muller* (G)



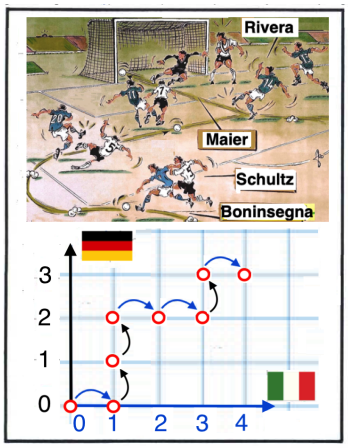
98': *segna Burgnich* (I)



104': *segna Riva* (I)



110': *segna Muller* (G)



111': *segna Rivera* (I)

Lo spazio degli stati è, a tutti gli effetti, il piano a coordinate intere positive. Lo stato *Italia-Germania* $x-y$ è il punto (x,y).

Le azioni sono le due traslazioni "unitarie", con la direzione degli assi.

La storia della partita, raccontata attraverso il modello, è un *calcolo*. Non è altro che una sequenza ordinata di sette azioni che modificano il risultato iniziale *Italia-Germania* 0-0 nel risultato finale *Italia-Germania* 4-3

Esercizio 22. Il lupo, la capra e i cavoli.

Il problema è tratto da *Propositiones ad acuendos juvenes* di Alcuino da York (800 circa).

C'era una volta un contadino che al mercato comprò un lupo, una capra e un cavolo. Sulla via del ritorno, il contadino giunse sulla riva di un fiume e noleggiò una barca. Ma la barca poteva portare, oltre al contadino, solo uno dei suoi acquisti: il lupo, la capra o il cavolo.

Se lasciati incustoditi insieme, il lupo avrebbe mangiato la capra o la capra avrebbe mangiato il cavolo. La sfida del contadino è portare i suoi acquisti sull'altra sponda del fiume, senza che nessuno sia mangiato.

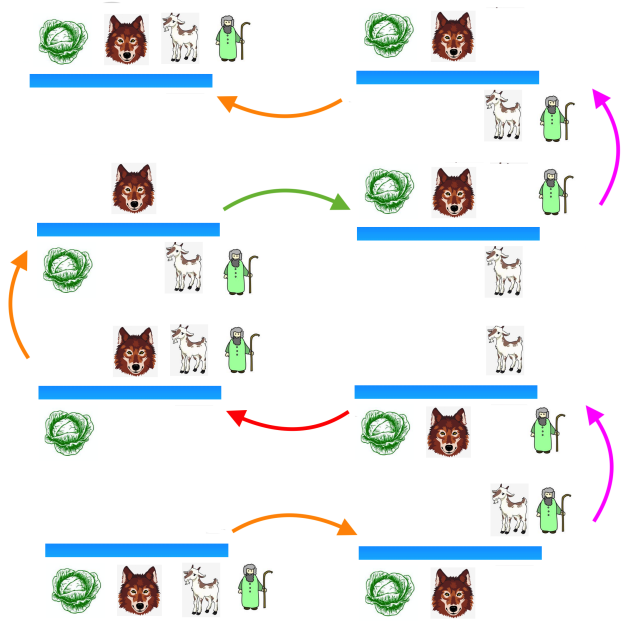
Azioni del contadino:

- attraversa con la capra
- attraversa con il lupo
- attraversa con lil cavolo
- attraversa da solo

Stato iniziale:

Stato finale:

La soluzione che segue è una sequenza di 7 azioni che inizia con lo stato iniziale e termina nello stato finale.

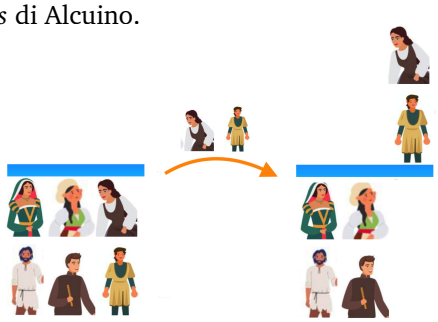


Esiste un'altra soluzione della stessa "lunghezza" (ossia, il numero di azioni è 7). Trovarla!

Alcuino da York (735 - 804) fu chiamato nel 780 da Carlo Magno a dirigere la Scuola Palatina, e dare ordine agli istituiti culturali ed educativi del regno carolingio. Il programma di Carlo Magno era di garantire l'istruzione elementare universale e gratuita in tutti i villaggi del regno, con maestri reclutati dal clero. Alcuino si occupò anche delle discipline del trivio e del quadrivio.

Esercizio 23. Tre fratelli che avevano ciascuno una sorella . . .

E' un altro problema delle *Propositiones ad acuendos juvenes* di Alcuino.

C'erano tre fratelli che avevano ciascuno una sorella e dovevano attraversare un fiume. Ciascuno di essi desiderava la sorella degli altri. Arrivati ad un fiume non trovarono altro che una piccola barca che poteva trasportare solo due di essi. Si dica in che modo possono attraversare tutti il fiume, senza che nessuna di esse sia oltraggiata.

Fare un modello stati-azione del problema con cui descrivere una soluzione.