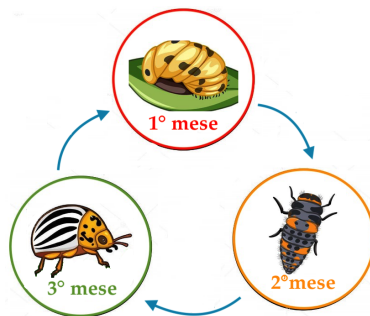




Modelli di Leslie delle popolazioni

Note

Leslie P. H. *The use of matrices in certain population mathematics* Biometrika, 33 (1945)



la matrice del sistema codifica le leggi di evoluzione:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

Modello di una popolazione di insetti.

Una popolazione di insetti è suddivisa in tre classi di età, in base al ciclo riproduttivo. Lo **stato del sistema** è la distribuzione della popolazione nelle tre classi seguenti:

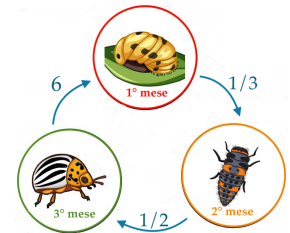
- classe 0: età da 0 a 1 mese
- classe 1: età da 1 a 2 mesi
- classe 2: età da 2 a 3 mesi

Lo stato iniziale della popolazione sia dato da una terna (P_0, P_1, P_2) di numeri:

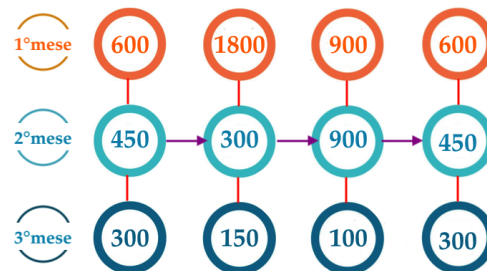
- il numero P_0 di individui di classe 0
- il numero P_1 di individui di classe 1
- il numero P_2 di individui di classe 2

La popolazione evolve dallo stato attuale allo stato successivo, dopo un mese, secondo queste leggi:

- metà degli insetti passa da classe 0 a classe 1
- $1/3$ degli insetti passa da classe 1 a classe 2
- ciascun insetto di classe 2 genera mediamente 6 insetti di classe 0



Una dinamica del sistema, a partire dallo stato iniziale $(600, 450, 300)$, mostra che esso ritorna allo stato iniziale dopo 3 mesi (è *ciclico*).



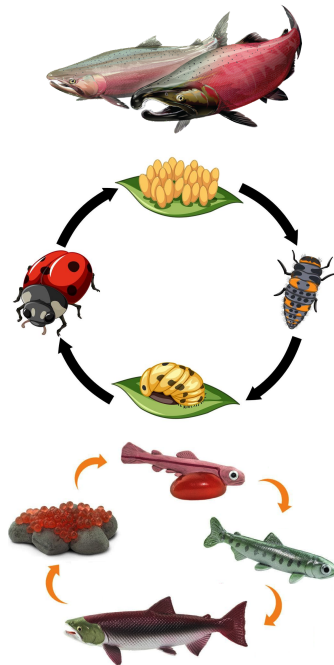
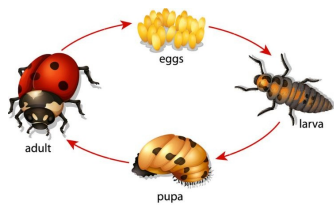
Studio di una popolazione di insetti.

Una popolazione di insetti ha le seguenti caratteristiche: ciascun insetto non vive più di 3 mesi, il 40% degli insetti al primo mese di vita raggiunge il secondo mese e solo il 30% di quelli che sono nel secondo mese di vita arriva al terzo. Gli insetti diventano fertili al terzo mese di vita, quando generano in media 5 nuovi nati ciascuno.

- Determinare il grafo e la matrice di Leslie del fenomeno.
- Una popolazione è inizialmente costituita da 1800 insetti nel primo mese, 160 nel secondo mese e 90 nel terzo. Studiare l'evoluzione (dinamica) della popolazione.
- Come cambia la dinamica quando cambia lo stato iniziale?

Note

Leslie P. H. *The use of matrices in certain population mathematics* Biometrika, 33 (1945)



Studio dell'indice di natalità.

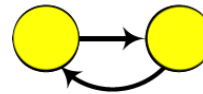
Una popolazione di insetti ha le seguenti caratteristiche: ciascun insetto non vive più di 3 mesi, il 30% degli insetti al primo mese di vita sopravvive e raggiunge il secondo mese e solo il 40% di quelli che sono nel secondo mese di vita arriva al terzo. Inoltre, gli insetti diventano fertili al terzo mese di vita, quando generano in media n nuovi nati ciascuno.

Definizione Il numero n si chiama *indice di natalità* della popolazione.

- Determinare la matrice di Leslie che descrive la dinamica della popolazione.
- Una popolazione è inizialmente costituita da 100 insetti nel primo mese, 150 nel secondo mese e 80 nel terzo. Studiare l'evoluzione (dinamica) della popolazione.
- Come cambia la dinamica al cambiare dell'indice n ? Determinare per quali valori dell'indice n il sistema è ciclico.

Una popolazione a due classi di età.

Consideriamo una popolazione suddivisa in due classi di età: giovani e adulti.

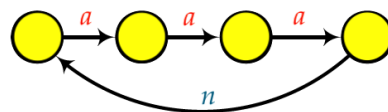


Sia p la frazione della popolazione giovanile che riesce a raggiungere l'età adulta. Gli adulti generano in media n nuovi nati ciascuno.

- Determinare il grafo e la matrice di Leslie che descrivono la dinamica della popolazione.
- Una popolazione è inizialmente costituita da 1000 giovani e 100 adulti. Studiare l'evoluzione (dinamica) della popolazione.
- Come cambia la dinamica al cambiare dello stato iniziale? Studiare l'evoluzione della popolazione con uno stato iniziale "generico".
- Studiare la dinamica nel caso in cui n sia il reciproco di p .
- Esistono degli stati tali che il fenomeno sia ciclico di periodo 3?

Una popolazione di salmoni.

Il grafo descrive la dinamica di una popolazione di salmoni del Pacifico suddivisa in 4 classi di età.



- Scrivere la matrice di Leslie della dinamica della popolazione.
- Una popolazione è inizialmente costituita da (1000, 500, 200, 100). Studiare l'evoluzione (dinamica) della popolazione.
- Come cambia la dinamica al cambiare dello stato iniziale? Studiare l'evoluzione della popolazione con uno stato iniziale "generico".
- Studiare la dinamica nel caso in cui n sia il cubo del reciproco di a .



Modelli di Leslie: studio di casi reali

Note

La silvia blu dalla gola nera (*Setophaga caerulescens*) è un piccolo uccello passeriforme. Si riproduce nel Nord-est dell'America durante i mesi più caldi e migra nell'America Centrale nei mesi freddi.



Illustrazione di D. A. Sibley Fonte: www.audubon.org



HUBBARD BROOK
ECOSYSTEM STUDY

Hubbard Brook Experimental Forest, nelle White Mountains del New Hampshire, è un sito dove si svolge da oltre 60 anni l'Hubbard Brook Ecosystem Study un progetto di ricerca in cui gli studiosi fanno esperimenti e modelli su ecosistemi forestali.

The oldest Black-throated Blue Warbler was a female, and at least 9 years, 8 months old. She was banded in New Jersey in 1975 and shot in Panama in 1985.
www.allaboutbirds.org/guide/Black-throated_Blue_Warbler

L'isola di Sable (Canada) ospita una popolazione di foche grigie (*Halichoerus grypus*)

Fonte: M. Manske, C. J. Schwarz, W. T. Stobo

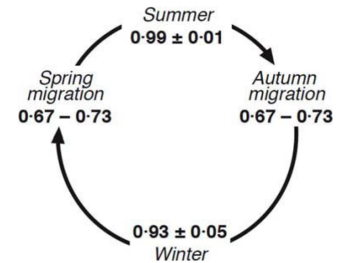
The Estimation of the rate of population change of Grey Seals on Sable Island



La silvia blu dalla gola nera.

La silvia blu dalla gola nera ha un comportamento ciclico, di periodicità annuale, con 4 fasi.

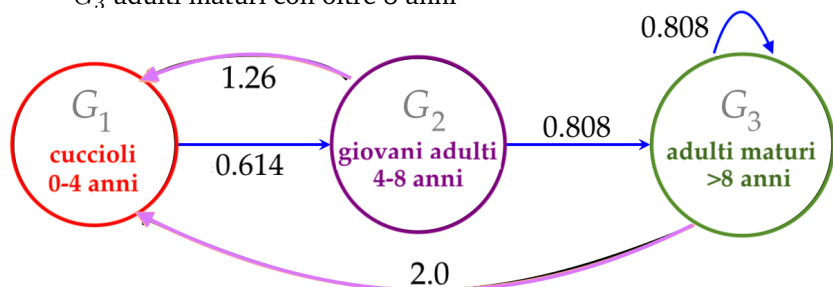
- L'estate a Hubbard Brook (maggio-agosto) è dedicata all'allevamento dei piccoli con una mortalità del 1%
- Durante l'inverno (ottobre-marzo), in Giamaica, la mortalità è del 7%
- Le due migrazioni durano 6 settimane ciascuna, avvengono ad aprile e a settembre, ed in entrambe la mortalità è del 30% circa.
- Determinare la probabilità p che un individuo della popolazione sopravviva all'anno successivo.
- Qual è la probabilità che un nuovo nato arrivi all'età di n anni?
- Determinare la durata massima n della vita, definita come il minimo intero n tale che meno di 1 su 1000 nuovi nati arrivi all'età n
- Tale valore è in accordo con "l'esemplare più longevo aveva un'età di 9 anni ed 8 mesi"?
- Fare un modello di Leslie in cui la popolazione è suddivisa in n classi di età, ciascuna della durata di 1 anno. Assumere che gli individui dal 2° anno di età in poi abbiano indice di fertilità k .
- Determinare k in modo che il sistema sia stabile. [rsp. $k=1,21$ l'abbondanza sia la stessa da n a $n+1$]



La foca grigia dell'Isola di Sable, Canada.

La popolazione è suddivisa in tre classi di età:

- G_1 cuccioli da 0 a 4 anni
- G_2 giovani adulti da 4 a 8 anni
- G_3 adulti maturi con oltre 8 anni



Il grafo mostra gli indici di fertilità e di sopravvivenza della popolazione.

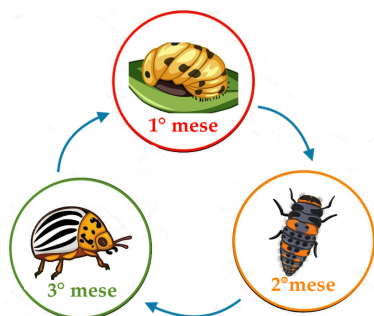
- Determinare la matrice di Leslie che descrive la dinamica della popolazione di foche
- Una popolazione è inizialmente costituita da 10000 cuccioli, 20000 giovani adulti e 30000 adulti. Calcolarne l'evoluzione.
- La popolazione crescerà, rimarrà stabile o diminuirà?
- Nel 2021 la stima della popolazione complessiva di foche era di circa 366000 individui. Determinare l'unica distribuzione della popolazione con tale abbondanza di foche.



Modelli di Leslie delle popolazioni

Note

Leslie P. H. *The use of matrices in certain population mathematics* Biometrika, 33 (1945)



la matrice del sistema codifica le leggi di evoluzione:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

Modello di una popolazione di insetti.

Una popolazione di insetti è suddivisa in tre classi di età, in base al ciclo riproduttivo. Lo **stato del sistema** è la distribuzione della popolazione nelle tre classi seguenti:

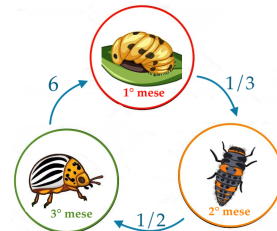
- classe 0: età da 0 a 1 mese
- classe 1: età da 1 a 2 mesi
- classe 2: età da 2 a 3 mesi

Lo *stato* della popolazione è allora dato da una terna (P_0, P_1, P_2) di numeri:

- il numero P_0 di individui di classe 0
- il numero P_1 di individui di classe 1
- il numero P_2 di individui di classe 2

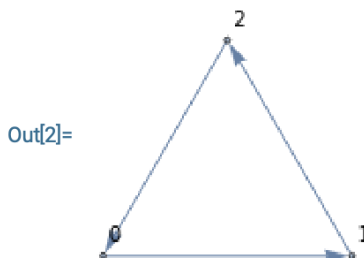
La popolazione evolve dallo stato attuale allo stato successivo, dopo un mese, secondo queste leggi:

- metà degli insetti passa da classe 0 a classe 1
- $1/3$ degli insetti passa da classe 1 a classe 2
- ciascun insetto di classe 2 genera mediamente 6 insetti di classe 0



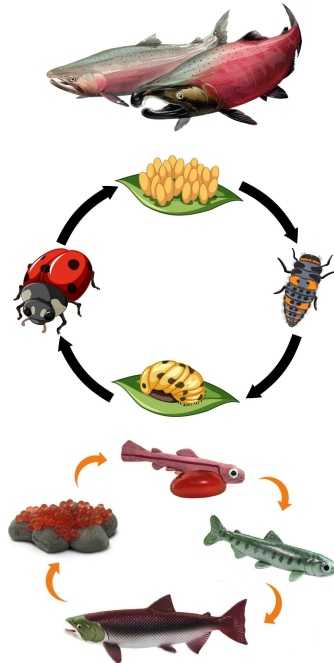
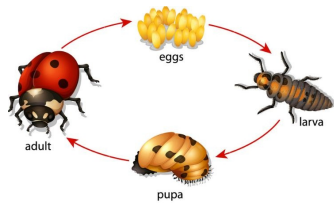
In *Mathematica*, il grafo della dinamica del sistema si ottiene così:

```
In[2]:= Graph[{0 → 1, 1 → 2, 2 → 0}, VertexLabels → All]
```

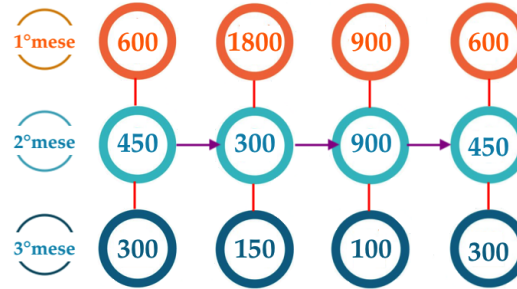


Note

Leslie P. H. *The use of matrices in certain population mathematics* Biometrika, 33 (1945)



Una dinamica del sistema, a partire dallo stato iniziale (600, 450, 300), mostra che esso ritorna allo stato iniziale dopo 3 mesi (è ciclico).



Studio di una popolazione di insetti.

Una popolazione di insetti ha le seguenti caratteristiche: ciascun insetto non vive più di 3 mesi, il 40% degli insetti al primo mese di vita raggiunge il secondo mese e solo il 30% di quelli che sono nel secondo mese di vita arriva al terzo. Gli insetti diventano fertili al terzo mese di vita, quando generano in media 5 nuovi nati ciascuno.

- Determinare il grafo e la matrice di Leslie del fenomeno.
- Una popolazione è inizialmente costituita da 1800 insetti nel primo mese, 160 nel secondo mese e 90 nel terzo. Studiare l'evoluzione (dinamica) della popolazione.
- Come cambia la dinamica quando cambia lo stato iniziale?

Studio dell'indice di natalità.

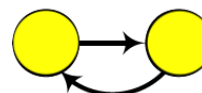
Una popolazione di insetti ha le seguenti caratteristiche: ciascun insetto non vive più di 3 mesi, il 30% degli insetti al primo mese di vita sopravvive e raggiunge il secondo mese e solo il 40% di quelli che sono nel secondo mese di vita arriva al terzo. Inoltre, gli insetti diventano fertili al terzo mese di vita, quando generano in media n nuovi nati ciascuno.

Definizione Il numero n si chiama *indice di natalità* della popolazione.

- Determinare la matrice di Leslie che descrive la dinamica della popolazione.
- Una popolazione è inizialmente costituita da 100 insetti nel primo mese, 150 nel secondo mese e 80 nel terzo. Studiare l'evoluzione (dinamica) della popolazione.
- Come cambia la dinamica al cambiare dell'indice n ? Determinare per quali valori dell'indice n il sistema è ciclico.

Una popolazione a due classi di età.

Consideriamo una popolazione suddivisa in due classi di età: giovani e adulti.



Sia p la frazione della popolazione giovanile che riesce a raggiungere l'età adulta. Gli adulti generano in media n nuovi nati ciascuno.

- Determinare il grafo e la matrice di Leslie che descrivono la dinamica della popolazione.
- Una popolazione è inizialmente costituita da 1000 giovani e 100 adulti. Studiare l'evoluzione (dinamica) della popolazione.
- Come cambia la dinamica al cambiare dello stato iniziale? Studiare l'evoluzione della popolazione con uno stato iniziale "generico".
- Studiare la dinamica nel caso in cui n sia il reciproco di p .
- Esistono degli stati tali che il fenomeno sia ciclico di periodo 3?



Metodo di cattura e ricattura

Note

Leslie P. H. *The use of matrices in certain population mathematics* Biometrika, 33 (1945)



Indice di Lincoln-Petersen di una popolazione.

Per le popolazioni mobili, gli ecologi usano il metodo di cattura e e ricattura per fare una stima della popolazione di una regione. Catturare, marcare e riconquistare individui all'interno di una popolazione è la tecnica più utilizzata per stimare le popolazioni animali.

I metodi di cattura-ricattura o contrassegno-ricattura si basano su intrappolare, marcare e rilasciare un numero noto di marcati animali (M) nella popolazione da stimare (N).

Dopo aver dato il contrassegno agli individui, passato un adeguato periodo di tempo per mescolarsi con il resto della popolazione, alcuni individui n vengono nuovamente catturati dalla popolazione. Di questi, R individui sono ricatturati.

Se assumiamo che rimanga invariato il rapporto allora n/R coincide con N/M . Ne segue una stima $N = \frac{n}{R}M$

Questo metodo è noto come indice Lincoln-Petersen della dimensione relativa di una popolazione. Come con qualsiasi metodo di stima della popolazione, l'accuratezza dell'indice Lincoln-Peterson dipende da alcune ipotesi.

Innanzitutto, il metodo presuppone che il campionamento sia casuale, cioè ogni individuo nella popolazione abbia la stessa probabilità di essere catturato.

In secondo luogo, gli individui contrassegnati devono distribuirsi in modo casuale in tutta la popolazione in modo che il secondo campione rappresenti accuratamente la popolazione.

Infine, il rapporto tra individui contrassegnati e non contrassegnati non deve cambiare tra i periodi di campionamento. Questo è particolarmente importante se il metodo di marcatura degli individui influenza la loro sopravvivenza, come nel caso di segni molto visibili che aumentano la loro visibilità ai predatori.



Modelli matematici in ecologia - Stima di Popolazioni

Note

La maggior parte degli animali vive in ambienti soggetti ai cicli delle stagioni, per cui l'unità di misura naturale nei modelli delle popolazioni è l'anno. Si studia così la popolazione che vive in una regione data nell'anno t , ad esempio gli elefanti che vivono in un parco nazionale, e si vuole fare una stima del loro numero $P(t)$. Tale numero cambia nel tempo a causa di eventi come la morte di un membro oppure una nascita.



Per fare un modello che descrive come cambia $P(t)$ si tiene conto del numero $N(t)$ di nascite e del numero $M(t)$ di morti durante l'anno t . E' rarissimo conoscere con precisione questi numeri, neppure con gli strumenti della moderna tecnologia. Esistono degli strumenti matematici con cui è possibile costruire modelli per fare stime di $P(t)$, $N(t)$, $M(t)$. Il concetto su cui si basano questi strumenti è quello di *tasso demografico*.

Gli ecologi preferiscono usare i *tassi di sopravvivenza* piuttosto che di mortalità. Della popolazione $P(t)$, all'inizio dell'anno t , sia $S(t) = \phi P(t)$ la popolazione sopravvissuta nell'anno successivo. ϕ si chiama *tasso di sopravvivenza*. Verificare che $1 + r = \phi + n$.

Popolazione chiusa.

In una popolazione chiusa si ha $P(t+1) - P(t) = N(t) - M(t)$

dove $N(t)$ è il numero di nuovi nati nel corso dell'anno t e $M(t)$ conta il numero di morti nel corso dell'anno t .

Tassi demografici.

Una popolazione abbia un'abbondanza $P(t)$. Se $N(t)$ il numero di nuovi nati nell'anno t allora il *tasso di natalità* è dato da

$$n(t) = \frac{N(t)}{P(t)}$$

Se $M(t)$ il numero di morti nell'anno t allora il *tasso di mortalità* è

$$m(t) = \frac{M(t)}{P(t)}$$

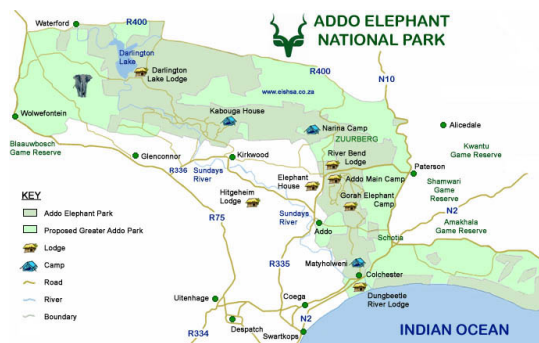
La conoscenza della popolazione attuale $P(t)$ e dei tassi $m(t)$, $n(t)$ assieme all'ipotesi che essi rimangano costanti con valori m , n , permette di prevedere la popolazione nell'anno $t+1$:

$$P_{t+1}(t) = P(t) - mP(t) + nP(t) = (1 + n - m)P(t) = (1 + r)P(t)$$

Il numero r si chiama di *tasso di crescita* della popolazione e per ipotesi è dato da $r = n - m$. Alcuni chiamano tasso di crescita il numero $\lambda = 1 + r$.

Natalità e mortalità dell'Addo Elephant National Park.

Fonte: Whitehouse & Hall-Martin, 2000



All'inizio del 1996 c'erano 249 elefanti nel Addo Elephant National Park (South Africa).

Il tasso di natalità medio degli anni '80 e '90 è stato $n = 0.0693$.

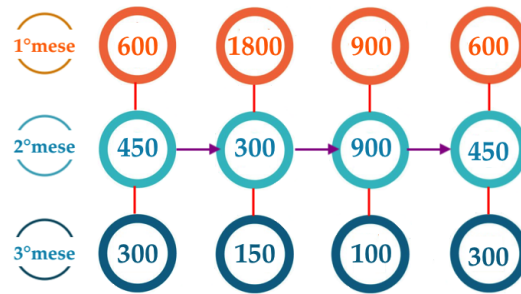
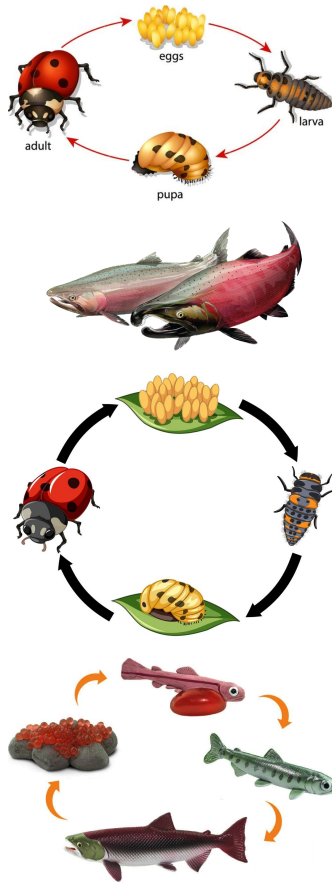
Nello stesso periodo, il tasso di mortalità medio è stato $m = 0.0175$.

Scrivi un'equazione che permetta di stimare il numero di nascite nel corso dell'anno 1996 nel parco e deduci quella stima. [Risposta: 17]

Scrivi un'equazione che permetta di stimare il numero di morti nel corso dell'anno 1996 nel parco e deduci quella stima. [Risposta: 4]

Qual è il tasso di crescita (stimato) del parco nel 1996? Scrivi un'equazione che permetta di stimare la popolazione alla fine del 1996 (o inizio 1997) e deduci la stima [la stima è 262, la popolazione effettiva fu di 261 elefanti.]

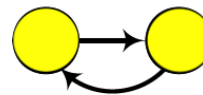
Note



- Determinare la matrice di Leslie che descrive la dinamica della popolazione.
- Una popolazione è inizialmente costituita da 100 insetti nel primo mese, 150 nel secondo mese e 80 nel terzo. Studiare l'evoluzione (dinamica) della popolazione.
- Come cambia la dinamica al cambiare dell'indice n ? Determinare per quali valori dell'indice n il sistema è ciclico.

Una popolazione a due classi di età.

Consideriamo una popolazione suddivisa in due classi di età: giovani e adulti.

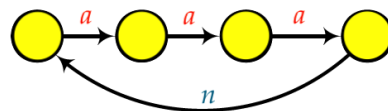


Sia p la frazione della popolazione giovanile che riesce a raggiungere l'età adulta. Gli adulti generano in media n nuovi nati ciascuno.

- Determinare il grafo e la matrice di Leslie che descrivono la dinamica della popolazione.
- Una popolazione è inizialmente costituita da 1000 giovani e 100 adulti. Studiare l'evoluzione (dinamica) della popolazione.
- Come cambia la dinamica al cambiare dello stato iniziale? Studiare l'evoluzione della popolazione con uno stato iniziale "generico".
- Studiare la dinamica nel caso in cui n sia il reciproco di p .
- Esistono degli stati tali che il fenomeno sia ciclico di periodo 3?

Una popolazione di salmoni.

Il grafo descrive la dinamica di una popolazione di salmoni del Pacifico suddivisa in 4 classi di età.

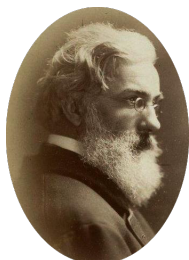


- Scrivere la matrice di Leslie della dinamica della popolazione.
- Una popolazione è inizialmente costituita da (1000, 500, 200, 100). Studiare l'evoluzione (dinamica) della popolazione.
- Come cambia la dinamica al cambiare dello stato iniziale? Studiare l'evoluzione della popolazione con uno stato iniziale "generico".
- Studiare la dinamica nel caso in cui n sia il cubo del reciproco di a .



Qual è la popolazione umana sostenibile dal pianeta?

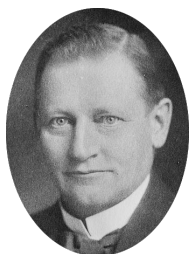
Note



Ernst G. Ravenstein (1834 – 1913) geografo anglo-tedesco.

Il periodo in cui vive Ravenstein è quello dell'emigrazione degli europei verso le Americhe e l'Australia. La questione della sostenibilità del pianeta viene affrontata con un modello.

Albrecht Penck (1858 – 1945) geografo e geologo tedesco.



Penck propone un modello della relazione tra la produzione di cibo e la densità di popolazione.

Ravenstein, 1891

Fonti: E. G. Ravenstein, 1891, *Lands of the Globe Still Available for European Settlement*

Nell'articolo Ravenstein si propone di determinare:

- la superficie coltivabile per la produzione di cibo e altre risorse necessarie alla vita delle persone
- il numero di persone che tale superficie è in grado di sostenere

Ravenstein suddivide la superficie terrestre abitabile in tre tipi di regioni, per ciascuno dei quali determina l'area (in milioni di km^2) e la sostenibilità (abitanti per km^2):

	Fertile	Steppa	Deserto
Superficie	73,217	36,003	10,826
Sostenibilità	80	3,9	0,4

Usare il prodotto scalare per calcolare la popolazione totale sostenibile.

Penck, 1925

Nel 1925, Albrecht Penck pubblica *The chief problem of physical anthropogeography* che contiene uno studio su la relazione tra la superficie della Terra e i bisogni nutrizionali dell'uomo che essa soddisfa

Peck considera dapprima la popolazione mondiale P , la produzione mondiale di cibo C e il bisogno nutritivo di un individuo m :

$$C = mP$$

D'altra parte, la produzione C si può calcolare anche con la formula:

$$C = pA$$

in cui A è la superficie produttiva e p la produzione per unità di superficie. Ne segue l'equazione:

$$P = \frac{p}{m} A$$

Le quantità P, p, m, A sono tutte finite, e anche se il bisogno nutritivo m di un individuo è piccolo, non può essere nullo, di conseguenza la popolazione P è limitata.



L'impatto ambientale della produzione del latte

Note

Fonti: www.bbc.com/news/science-environment



Che cosa è l'impatto energetico?

Fonte: www.ictfootprint.eu

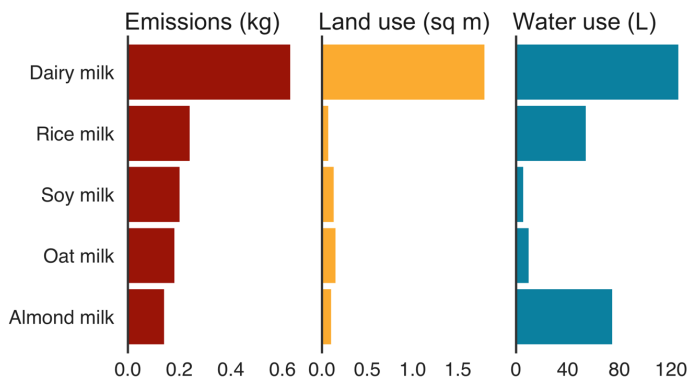
Proprio come un'impronta (impatto) di anidride carbonica, l'impronta energetica è la misura dell'impatto sull'ambiente scaturito dal consumo di energia. L'"impronta energetica" di un dato prodotto è una valutazione del suo consumo energetico. Si può misurare anche l'impronta energetica di un'organizzazione o di un territorio, fissandone confini di spazio e di tempo. Esistono diversi metodi per calcolare l'impronta energetica, molti adottano il punto di vista del ciclo di vita (LCA). Solitamente, si distinguono le forme di energia in base alla fonte di energia e alla sua rinnovabilità. Ad esempio, fonti non rinnovabili di energia sono fossile e nucleare. Invece, fonti di energia rinnovabili sono quella solare, eolica, geotermica, idrica. Esistono diversi indicatori utilizzati per quantificare l'impronta energetica. Alcuni di loro considerano tutti i tipi di energia.

Impatto ambientale della produzione del latte

Uno studio della Oxford University dimostra che le emissioni di gas serra, il consumo di suolo e quello di acqua nella produzione di latte vegetale sono inferiori a quelli dovuti alla produzione di latte nei caseifici.

Which milk should I choose?

Environmental impact of one glass (200ml) of different milks



Source: Poore & Nemecek (2018), Science. Additional calculations, J. Poore

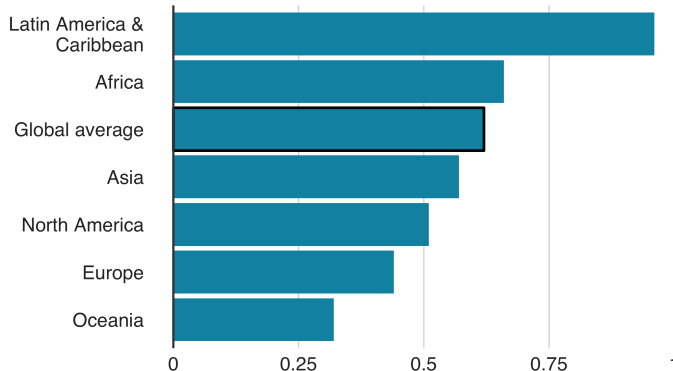
Produrre un bicchiere di latte al giorno per un anno richiede 650 mq di terreno, l'equivalente di due campi da tennis e più di 10 volte la stessa quantità di latte d'avena. Il latte di mandorla richiede più acqua per essere prodotto rispetto al latte di soia o di avena. Un bicchiere richiede 74 litri, più di una normale doccia. Anche il latte di riso è assetato e richiede 54 litri di acqua per bicchiere. Tuttavia, sia il latte di mandorle che quello di riso richiedono meno acqua per essere prodotti rispetto al bicchiere di latte da caseificio.

Impronta ecologica nella produzione del latte

La produzione del latte incide sulle emissioni di CO₂, e di conseguenza sull'impronta ecologica del carbonio.

Dairy milk's climate impact by location

Greenhouse gas emissions (kg of CO₂ eq per one 200ml glass)



Source: Poore & Nemecek (2018), Science. Additional calculations, J. Poore

Il grafico tiene conto delle emissioni derivanti dall'agricoltura, dal trasporto, l'imballaggio e la lavorazione. Dove l'alimentazione del bestiame ha avuto un impatto sulla deforestazione, essa è stata inclusa.